MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. SEPTEMBER 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

59. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Bol, G., Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören 97

Minagawa, T., and T. Rado, On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution 151

Nagao, H., and T. Nakayama, On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules . . 164

Weier, J., Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten 171

Foster, A. L., Generalized "Boolean" theory of universal algebras. II 191

Meyer-König, W., und K. Zeller, Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren . 200

Rose, A., Fragments of the m-valued propositional calculus 206

Bol, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 97—150 (1953)

Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören.

Von
Gerrit Bol.

Die Lie-Quadriken einer Fläche haben bekanntlich außer dieser Fläche selbst im allgemeinen noch 4 weitere Hüllflächen. Die zu einer Stelle auf der vorgegebenen gehörigen 4 Punkte dieser Flächen sind Ecken eines Vierseits, das auf der zugehörigen Lie-Quadrik liegt; man nennt es das Vierseit von Demoulin.

Wir wollen hier die Flächen untersuchen, bei denen die Diagonalen dieser Vierseite einer linearen Kongruenz angehören; der Kürze halber nennen wir sie Kongruenzflächen. Dabei soll stets angenommen werden, daß die Vierseite nicht entarten, also 4 verschiedene Ecken haben. Die fraglichen Flächen sind trotz ihrer interessanten Eigenschaften bisher anscheinend nicht beachtet worden; sie sind spezielle Projektivminimalflächen.

Ihre wichtigsten Eigenschaften sind geradengeometrischer Natur. Den beiden Schmiegtangentenkongruenzen einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des projektiven R_3 entsprechen bekanntlich im Kleinschen Geradenraum 2 Flächen

$$\mathfrak{u}(u, v), \qquad \mathfrak{v}(u, v);$$

diese sind in bezug auf die Asymptotenlinienparameter u, v von $\mathfrak{x}$ Laplace-Transformierte voneinander. Die von ihnen erzeugte Laplace-Kette

$$(1) \qquad \ldots \mathfrak{v}_{-2}, \mathfrak{v}_{-1}, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0, \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \ldots$$

nennen wir die Godeaux-Kette von $\mathfrak{x}(u, v)$ [1]).

Kennzeichnend für unsere Flächen ist, daß ihrer Godeaux-Kette eine weitere Laplace-Kette in bezug auf u, v einbeschrieben ist, die geschlossen ist und die Periode 4 hat; dabei liegt jeder Punkt einer Fläche der neuen Kette in der Ebene, die von den entsprechenden Punkten von 3 aufeinanderfolgenden Flächen $\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{u}_{k+1}$, $\mathfrak{u}_{k+2}$ der Godeaux-Kette aufgespannt wird [2]).

[1]) Sie wurde vor allem von L. Godeaux und O. Rozet untersucht; man vgl. L. Godeaux, La Théorie des surfaces et l'espace réglé (Géométrie projective différentielle), Actualités scient. et industr., Paris 1934. Weiterhin zitiert „G".

[2]) Diese Kette wurde für beliebige Projektivminimalflächen von L. Godeaux angegeben. Sie ist dort jedoch im allgemeinen nicht geschlossen und der Godeaux-Kette nur zweifach im angegebenen Sinne einbeschrieben. Vgl. Godeaux, L.: Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci. **24**, 213—222 (1938).

Derselbe Punkt liegt dann auch in der Ebene durch $\mathfrak{u}_{k+4}$, $\mathfrak{u}_{k+5}$, $\mathfrak{u}_{k+6}$ und in der Ebene durch $\mathfrak{u}_{k-4}$, $\mathfrak{u}_{k-3}$, $\mathfrak{u}_{k-2}$, usw. Dabei ist

$$\mathfrak{v}_{-k} = \mathfrak{u}_{-k-1} \tag{2}$$

zu setzen.

Damit hängt zusammen, daß die GODEAUX-Kette unserer Flächen eine Projektivität π des R_5 in sich gestattet, die jede Fläche auf ihre vierte LAPLACE-Transformierte abbildet. Die einbeschriebene Kette wird hierbei auf sich abgebildet. Infolgedessen läßt sich die Frage beantworten, ob die GODEAUX-Kette unserer Flächen geschlossen sein kann; dies stellt sich als möglich heraus und die Periode kann jede durch 4 teilbare Zahl $4n \geqq 8$ sein.

Die Kongruenz K, der die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN unserer Fläche angehören, wird im R_5 von einem dreidimensionalen linearen Raum $\boldsymbol{G}$ dargestellt, der von π punktweise festgelassen wird. Die zu $\boldsymbol{G}$ in bezug auf die absolute Quadrik $\boldsymbol{Q}$ des Geradenraumes polare Gerade $\boldsymbol{g}$ bleibt bei π ebenfalls fest, in ihr wird von π eine Projektivität $\pi_{\boldsymbol{g}}$ induziert. Die Elementarteiler von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ sind für die Eigenschaften unserer Fläche von grundlegender Bedeutung.

Nennt man den Übergang von einer Fläche zu einer Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken eine M-Transformation, so ist diese Beziehung nach O. MAYER[3]) bei jeder Projektivminimalfläche umkehrbar: Die erste Fläche ist auch M-Transformierte jeder Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken, sofern diese nicht entarten. Diese Hüllflächen sind daher wieder Projektivminimalflächen. Durch wiederholte M-Transformation einer Projektivminimalfläche entsteht ein zweifach unendliches System solcher Flächen; wir sprechen von einem M-System. Die Flächen des Systems lassen sich den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten eines ebenen CARTESischen Koordinatensystems zuordnen, deren Koordinatensumme gerade ist. Dieses Gitter nennen wir das M-Diagramm unserer Fläche.

In § 5 wird untersucht, wann im M-System entartete Flächen vorkommen; das ist genau dann der Fall, wenn $\pi_{\boldsymbol{g}}$ zwei gleiche Eigenwerte hat. In § 7 untersuchen wir die Beziehungen der Flächen des M-Systems zueinander, wenn keine Entartungen vorkommen; das System gestattet dann eine Gruppe von Projektivitäten, denen Parallelverschiebungen des Gitters entsprechen. Insbesondere wird untersucht, wann diese Gruppe endlich ist.

Die Flächen des M-Systems gehören zu den „Schichtflächen" zweier Paare gegenseitig stratifiabler Kongruenzen.

In § 6 wird eine Klassifikation unserer Flächen durchgeführt, wobei dreierlei Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind. Man erhält eine Einteilung in 24 Klassen, in 7 davon kommen Flächen mit geschlossener GODEAUX-Kette vor.

Wenn die GODEAUX-Kette einer Fläche sich schließt, so ist ihre Gliederzahl bekanntlich gerade[4]); sie ist dann auch GODEAUX-Kette einer zweiten Fläche, deren Schmiegtangenten durch die $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gegenüberliegenden

[3]) MAYER, O.: Mathematica, Cluj (Timisoara) **3**, 129—133. — Bull. Sci. Math. **56**, 146—168, 188—200 (1932).

[4]) G, p. 18.

Flächen der Kette dargestellt werden. Wir nennen diese Fläche die Gegenfläche der vorgegebenen. In unserem Fall gehört sie ebenfalls zu den oben genannten Schichtflächen. Ist die Periode der Kette durch 8 teilbar, so sind beide Flächen entweder projektiv gleichwertig oder sie gehen auseinander beim Nullsystem eines linearen Komplexes hervor.

Ist die GODEAUX-Kette einer hyperbolisch gekrümmten Fläche geschlossen, so gehört die Gegenfläche stets dem M-System an. Noch nicht vollständig geklärt ist die Frage, bei welchen elliptisch gekrümmten Flächen dies der Fall ist; sie hängt zusammen mit einem Problem der algebraischen Zahlentheorie.

In § 9 bringen wir neben zusätzlichen Bemerkungen einige Beispiele. Der Mehrzahl der 24 Klassen gehören Projektivrotationsflächen an, in vielen Fällen sogar gewöhnliche Rotationsflächen, deren Meridiankurven mit doppeltperiodischen Funktionen zusammenhängen. Besonders einfache Beispiele liefert die Klasse der Koinzidenzflächen; diese sind gleichzeitig spezielle W-Flächen nach LIE und KLEIN und Tetraedralflächen. Jede Fläche mit der Gleichung

$$z = x^{\operatorname{tg} A}\, y^{\operatorname{tg} B}, \qquad A + B = \frac{\pi}{4}$$

ist Kongruenzfläche; ihre GODEAUX-Kette ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode $4n$, wenn A ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/4n$ ist. Für $A = \pi/8$ gehört hierzu eine 1952 von M. CARTON angegebene Fläche, deren GODEAUX-Kette die Periode 8 hat[5]).

§ 1. Grundformeln.

Auf unserer nirgendwo parabolisch gekrümmten analytischen[6]) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ seien u und v Asymptotenlinienparameter; ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so richten wir sie so ein, daß sie in reellen Flächenpunkten konjugiert komplexe Werte haben. Wir normieren den Vektor $\mathfrak{x}$ so, daß die Determinante

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) = \varkappa \tag{3}$$

[7]) eine Konstante ist; unter unseren Voraussetzungen ist diese von Null verschieden; bei elliptisch gekrümmten Flächen sei sie reell.

Nach E. J. WILCZYNSKI gelten jetzt Ableitungsformeln von der Gestalt

$$\mathfrak{x}_{uu} = \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x} \tag{4}$$

[8]). Da bei den Regelflächen das Vierseit von DEMOULIN unbestimmt ist, können wir diese von der Betrachtung ausschließen; daher dürfen wir annehmen, daß

$$\beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0. \tag{5}$$

[5]) Vgl. auch BOL, G.: Arch. Math. 4, 61—74 (1953).

[6]) Es genügt auch achtmalige stetige Differenzierbarkeit.

[7]) Die Indizes u und v bedeuten Ableitungen.

[8]) Vgl. etwa BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Bd. I, Göttingen 1950, Bd. II im Druck. Das Buch wird weiterhin „PD" zitiert.

Wenn die Größe $A(u, v)$ bei einer Transformation

$$u = f(u^*), \qquad v = g(v^*) \tag{6}$$

der Parameter ersetzt wird durch

$$A^* = A f'^m g'^n,$$

so nennen wir A eine Halbinvariante vom Gewicht (m, n). Wir schreiben vor, daß sich $\mathfrak{x}$ wie eine Halbinvariante vom Gewicht $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ verhalten soll. Die Beziehung (3) bleibt dann bei den Transformationen (4) erhalten und es ist $\varkappa^* = \varkappa$. β und γ sind halbinvariant, β hat das Gewicht $(2, -1)$, γ das Gewicht $(-1, 2)$.

Unter den halbinvarianten Ableitungen von A verstehen wir die Bildungen

$$A_1 = A_u + m\frac{\gamma_u}{\gamma} A, \qquad A_2 = A_v + n\frac{\beta_v}{\beta} A \text{ [9]}. \tag{7}$$

A_1 und A_2 sind wieder halbinvariant, A_1 hat das Gewicht $(m+1, n)$, A_2 das Gewicht $(m, n+1)$. Für diese Differentiation gelten die gewöhnliche Summen- und Produktregel, es ist aber

$$A_{12} - A_{21} = 2(m\sigma - n\tau) A \tag{8}$$

mit

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\log\gamma)_{uv}, \qquad \tau = \tfrac{1}{2}(\log\beta)_{uv}. \tag{9}$$

Auf Grund der Definition ist

$$\beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 = 0. \tag{10}$$

Wählt man den Punkt $\mathfrak{y}$ geeignet, so haben jetzt die Ableitungsgleichungen der projektiven Flächentheorie die Gestalt

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{11} = \beta\mathfrak{x}_2 + L\mathfrak{x}, & \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{y} + P\mathfrak{x} \\ \mathfrak{x}_{21} = \mathfrak{y} + Q\mathfrak{x}, & \mathfrak{x}_{22} = \gamma\mathfrak{x}_1 + M\mathfrak{x} \\ \mathfrak{y}_1 = Q\mathfrak{x}_1 + L\mathfrak{x}_2 + \beta M\mathfrak{x}, & \mathfrak{y}_2 = M\mathfrak{x}_1 + P\mathfrak{x}_2 + \gamma L\mathfrak{x}. \end{cases} \tag{11}$$

Zwischen den Invarianten bestehen dabei die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \sigma, & Q &= \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tau && (12)\\ L_2 &= P_1, & M_1 &= Q_2 && (13)\\ & & \gamma L_1 &= \beta M_2 && (14) \end{aligned}\right\} \text{ [10]}.$$

Wegen (5) und (14) können wir setzen

$$L_1 = 2\beta N, \qquad M_2 = 2\gamma N. \tag{15}$$

Die von den Punkten $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{21}$ bestimmte Gerade ist die von WILCZYNSKI angegebene Direktrix erster Art, $\mathfrak{y}$ ist ihr Schnittpunkt mit der LIE-Quadrik

[9]) Vgl. PD II und BOL, G.: Comm. Math. Helv. **18**, 129—153 (1945); weiterhin zitiert „CH".

[10]) CH. Formeln (59) bis (63). Vgl. auch PD II.

an der betrachteten Flächenstelle. Die Direktrix zweiter Art verbindet die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Wir sprechen auch von den Normalen erster und zweiter Art von WILCZYNSKI.

Sämtliche vorkommenden Größen sind wieder halbinvariant, ihre Gewichte sind in der Tabelle (38) zusammengestellt.

Als Begleitvektoren der Fläche im Geradenraum verwenden wir die Vektoren

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) & \mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) \\ \mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\,[(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)] & \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}\,[(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)] \\ \mathfrak{p} = (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) & \mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) \end{array}\right\}^{11}).$$

Bedeutet das Zeichen $\circ$ die Polarenbildung in bezug auf die absolute Quadrik $\boldsymbol{Q}$ des Geradenraumes, so daß der Vektor $\mathfrak{g}$ dann und nur dann eine Gerade darstellt, wenn

$$\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g} = 0$$

und für 2 Geradenvektoren $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ gilt

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \circ (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}),$$

so ist nach (3)

$$(17)\qquad \mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} = -\frac{\varkappa}{2}, \qquad \mathfrak{b} \circ \mathfrak{b} = \frac{\varkappa}{2}, \qquad \mathfrak{p} \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \circ \mathfrak{p} = \varkappa, \qquad \mathfrak{q} \circ \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \circ \mathfrak{q} = -\varkappa,$$

während alle übrigen Produkte der Vektoren (16) verschwinden.

Für die Ableitungen der Vektoren (16) findet man nach (11)

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{u}_1 = \beta\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{u}_2 = 2\,\mathfrak{a} \\ \mathfrak{v}_1 = 2\,\mathfrak{b}, & \mathfrak{v}_2 = \gamma\,\mathfrak{u} \\ \mathfrak{a}_1 = Q\,\mathfrak{u}, & \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} \\ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{b}_2 = P\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{p}_1 = 2\,Q\,\mathfrak{a} - \beta\,M\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{p}_2 = \gamma\,\mathfrak{q} + 2M\,\mathfrak{a} - \gamma\,L\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{q}_1 = \beta\,\mathfrak{p} + 2L\,\mathfrak{b} - \beta\,M\,\mathfrak{u}, & \mathfrak{q}_2 = 2P\,\mathfrak{b} - \gamma\,L\,\mathfrak{u}. \end{array}\right.$$

Aus (18) folgt, daß

$$\ldots\,\mathfrak{b}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}, \mathfrak{a}, \ldots$$

4 aufeinanderfolgende Glieder der GODEAUX-Kette sind; so besagt $\mathfrak{u}_1 = \beta\,\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_2 = \gamma\,\mathfrak{u}$, daß $\mathfrak{u}$ die LAPLACE-Transformierte von $\mathfrak{v}$ in der v-Richtung ist. Weiter liest man aus (18) ab, daß $\mathfrak{u}_2$ eine Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_{-2}$ eine solche von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v}$ sein muß. Nun werden bekanntlich[10a]) die Kanten des Vierseits von DEMOULIN im Geradenraum dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ und $(\mathfrak{v}_{-1}, \mathfrak{v}_{-2})$ mit $\boldsymbol{Q}$. Setzen wir also

$$(19)\qquad L = H^2, \qquad M = K^2,$$

---

[11]) Für die Bezeichnung vgl. man PD I, §§ 16—18.

[10a]) Vgl. G., p. 26.

so stellen die Vektoren

$$\mathfrak{p} \pm 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{q} \pm 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v} \tag{20}$$

nach (17) die Kanten des Vierseits von DEMOULIN dar. Damit diese Kanten alle verschieden sind, müssen wir

$$L \neq 0, \qquad M \neq 0 \tag{21}$$

voraussetzen; dann ist auch $H \neq 0$, $K \neq 0$.

Die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN werden dargestellt von den Vektoren

$$H(\mathfrak{p} - M\mathfrak{u}) \pm K(\mathfrak{q} - L\mathfrak{v}), \tag{22}$$

die ebenfalls Geraden darstellen und zu sämtlichen 4 Vektoren (20) in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ polar sind.

Nach (18) ist

$$\begin{cases} (\mathfrak{q} - L\mathfrak{v})_1 = \beta(\mathfrak{p} - M\mathfrak{u} - 2N\mathfrak{v}) \\ (\mathfrak{p} - M\mathfrak{u})_2 = \gamma(\mathfrak{q} - L\mathfrak{v} - 2N\mathfrak{u}). \end{cases} \tag{23}$$

Sollen nun sämtliche Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN unserer Fläche einer linearen Kongruenz angehören, so müssen ihre Bildpunkte in einem festen linearen R_3 des R_5 liegen. Dieser enthält dann auch $\mathfrak{q} - L\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p} - M\mathfrak{u}$ und die Ableitungen dieser Punkte. Wäre nun für unsere Fläche $N \neq 0$, so müßte dieser R_3 nach (22), (23) aufgespannt werden von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$. Der von diesen Punkten aufgespannte R_3 ist aber nicht fest, denn er enthält beispielsweise nicht den Punkt $\mathfrak{u}_2 = 2\mathfrak{a}$.

Für unsere Kongruenzflächen ist also jedenfalls

$$N = 0. \tag{24}$$

Das bedeutet, wie man leicht einsieht, daß unsere Flächen spezielle Projektivminimalflächen sind. Denn die Geraden (20) erzeugen dann und nur dann Kongruenzen, deren Torsallinien auf der Fläche ein konjugiertes Netz bilden, wenn $N = 0$; diese Eigenschaft kennzeichnet aber nach einem bekannten Satze die Projektivminimalflächen[12]).

Nach (15) ist für unsere Flächen

$$L_1 = 0, \qquad M_2 = 0. \tag{25}$$

Daraus und aus (13) folgen nach (8), da L das Gewicht (2,0), M das Gewicht (0,2) hat, die Beziehungen

$$\begin{cases} -P_{11} = L_{12} - L_{21} = 4\sigma L = (2\beta\gamma - 4P)L \\ Q_{22} = M_{12} - M_{21} = -4\tau M = (4Q - 2\beta\gamma)M, \end{cases} \tag{26}$$

aus denen wegen (5), (21) hervorgeht, daß

$$P \neq 0, \qquad Q \neq 0. \tag{27}$$

[12]) Vgl. etwa THOMSEN, G.: Ann. di Mat. (4), **5**, 169—184 (1928).

Wir können deshalb setzen

$$L_2 = P_1 = 2aP, \qquad M_1 = Q_2 = 2bQ, \tag{28}$$

$$\gamma L = -Pc, \qquad \beta M = -Qd, \tag{29}$$

wobei wegen (5), (21)

$$c \neq 0, \qquad d \neq 0 \tag{30}$$

gilt, und finden aus (26) und durch Differentiation von (29), daß

$$\begin{cases} a_1 = \beta c + 2(L - a^2), & b_2 = \gamma d + 2(M - b^2) \\ c_1 = -2ac, & d_2 = -2bd. \end{cases} \tag{31}$$

Nach (18) und wegen (28), (29) ist

$$\begin{cases} (\mathfrak{p} - M\mathfrak{u})_1 = 2Q(\mathfrak{a} - b\mathfrak{u} + d\mathfrak{v}) \\ (\mathfrak{q} - L\mathfrak{v})_2 = 2P(\mathfrak{b} + c\mathfrak{u} - a\mathfrak{v}). \end{cases} \tag{32}$$

Der lineare R_3, der die Bildpunkte der Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN unserer Fläche enthält, wird deshalb aufgespannt von den Punkten

$$\begin{cases} \mathfrak{c} = \mathfrak{p} - M\mathfrak{u}, & \mathfrak{e} = \mathfrak{a} - b\mathfrak{u} + d\mathfrak{v} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{q} - L\mathfrak{v}, & \mathfrak{f} = \mathfrak{b} + c\mathfrak{u} - a\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{33}$$

Damit dieser R_3 fest ist, muß er auch die Ableitungen der Punkte (33) enthalten. Man findet

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_1 = 2d\mathfrak{b} + (Q - b_1)\mathfrak{u} + (d_1 - \beta b)\mathfrak{v} \\ \mathfrak{f}_2 = 2c\mathfrak{a} + (c_2 - \gamma a)\mathfrak{u} + (P - a_2)\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{34}$$

Die Vektoren auf der rechten Seite lassen sich nur dann aus den Vektoren (33) linear kombinieren, wenn

$$\begin{cases} b_1 = Q - 2cd, & a_2 = P - 2cd \\ d_1 = \beta b - 2ad, & c_2 = \gamma a - 2bc. \end{cases} \tag{35}$$

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend. Denn gelten sie, so ergeben sich für die Vektoren (33) die Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{c}_1 = 2Q\mathfrak{e}, & \mathfrak{c}_2 = \gamma\mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}_1 = \beta\mathfrak{c}, & \mathfrak{d}_2 = 2P\mathfrak{f} \\ \mathfrak{e}_1 = 2d\mathfrak{f}, & \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{c} - 2b\mathfrak{e} \\ \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{d} - 2a\mathfrak{f}, & \mathfrak{f}_2 = 2c\mathfrak{e}, \end{cases} \tag{36}$$

also sind sämtliche Ableitungen der Vektoren (33) Linearkombinationen dieser Vektoren selbst. Nach einem bekannten Satze[13]) folgt aber daraus, daß der von unseren Vektoren aufgespannte lineare Raum von u und v nicht abhängt.

[13]) Vgl. etwa PD I, § 13, Aufg. 3.

Man prüft nun leicht nach, daß die Integrierbarkeitsbedingungen, die nach (8) aus (31) und (35) hervorgehen, auf Grund dieser Gleichungen selbst und von (10), (25), (28), (29) stets befriedigt sind. Eliminiert man daher P und Q mittels (29) aus den Gleichungen (25), (28), (31), (35) und den aus (9), (12) folgenden

$$(37) \qquad (\log\gamma)_{uv} = \beta\gamma - 2P, \qquad (\log\beta)_{uv} = \beta\gamma - 2Q,$$

so ist das entstehende System von partiellen Differentialgleichungen für die Größen β, γ, L, M, a, b, c, d in Involution. Da man etwa $\beta(0, v)$, $\beta(u, 0)$, $\gamma(0, v)$, $\gamma(u, 0)$ und die Werte von L, M, a, b, c, d in $(0, 0)$ beliebig vorgeben kann, hängen die Lösungen dieses Systems von 4 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab. Da noch Parametertransformationen (6) möglich sind, die zwar die Lösung des Systems, aber nicht die Fläche ändern, findet man:

Die Kongruenzflächen hängen von zwei beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

Stellen wir noch die Gewichte der vorkommenden Größen in einer Tabelle zusammen:

(38)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	β	γ	P	Q	L	M	N	a	b	c	d	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{f}$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	-1	1	1	2	0	1	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	0
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	2	1	1	0	2	1	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Die obere Zahl ist die erste Gewichtszahl, die untere die zweite.

Sämtliche Formeln bleiben richtig bei den aus der folgenden Tabelle hervorgehenden Vertauschungen, die eine Vertauschung der beiden Scharen von Asymptotenlinien bedeuten:

$$(39) \qquad \begin{pmatrix} u & 1 & \beta & P & L & a & c & \mathfrak{u} & \mathfrak{a} & \mathfrak{p} & \mathfrak{c} & \mathfrak{e} \\ v & 2 & \gamma & Q & M & b & d & \mathfrak{v} & \mathfrak{b} & \mathfrak{q} & \mathfrak{d} & \mathfrak{f} \end{pmatrix}$$

Bei einer elliptisch gekrümmten Fläche ist hier jedes Paar übereinanderstehender Größen konjugiert komplex.

Die zu dem R_3 durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ polare Gerade $\boldsymbol{g}$ des R_5 wird aufgespannt von den Punkten

$$(40) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{p} + M\mathfrak{u} - 2b\mathfrak{a} - 2c\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{q} + L\mathfrak{v} - 2d\mathfrak{a} - 2a\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, daß für sie die Ableitungsgleichungen gelten:

$$(41) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = -2c\mathfrak{y}, & \mathfrak{x}_2 = \gamma\mathfrak{y} - 2b\mathfrak{x}. \\ \mathfrak{y}_1 = \beta\mathfrak{x} - 2a\mathfrak{y}, & \mathfrak{y}_2 = -2d\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Sie bestätigen, daß $\boldsymbol{g}$ eine feste Gerade des R_5 ist; ihre Schnittpunkte mit $\boldsymbol{Q}$ stellen die Leitgeraden dar von der linearen Kongruenz K, der die Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN der Fläche angehören.

Der Punkt $\lambda\,\mathfrak{r} + \mu\,\mathfrak{s}$ liegt nach (17) dann und nur dann auf $\boldsymbol{Q}$, wenn

$$(42) \qquad (M - b^2 + c^2)\,\lambda^2 + 2(a\,c - b\,d)\,\lambda\,\mu - (L - a^2 + d^2)\,\mu^2 = 0.$$

Man sieht daraus, daß die Kongruenz K sowohl elliptisch als auch hyperbolisch oder parabolisch sein kann. Denn die Anfangswerte des oben diskutierten Gleichungssystems lassen sich so wählen, daß die Diskriminante von (42) positiv, negativ oder gleich Null ausfällt.

Wählt man diese Anfangswerte so, daß in (42) sämtliche Koeffizienten verschwinden, so erhält man Flächen, bei denen die Kongruenz K singulär ist; sie besteht dann aus den Geraden durch einen festen Punkt P und den Geraden in einer festen Ebene E, wobei P in E liegt. Im Geradenraum schneidet der R_3, der K darstellt, $\boldsymbol{Q}$ in zwei Ebenen; $\boldsymbol{g}$ ist die Schnittgerade dieser Ebenen und stellt das Geradenbüschel durch P in E dar.

§ 2. Die Gruppe der GODEAUX-Kette.

Die Formeln (36) besagen, daß die Flächen $\mathfrak{c}(u, v)$, $\mathfrak{d}(u, v)$, $\mathfrak{f}(u, v)$, $\mathfrak{e}(u, v)$ in dieser Reihenfolge in bezug auf u, v eine geschlossene LAPLACE-Kette der Periode 4 bilden. Der Punkt $\mathfrak{e}$ liegt in der Ebene durch die zu den gleichen Parameterwerten gehörigen Punkte $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$ der GODEAUX-Kette. Nach einem bekannten Satze, den wir in unserem Falle bestätigen werden, liegt dann der nächste Punkt $\mathfrak{c}$ in der Ebene durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}_2$, und das geht so weiter. In diesem Sinne windet sich also die GODEAUX-Kette um die neue geschlossene Kette herum.

Nehmen wir dies vorweg, so können wir für die Flächen der GODEAUX-Kette eine Rekursionsformel der Gestalt

$$(44) \qquad \mathfrak{u}_m = \mathfrak{v}_m + g_m\,\mathfrak{u}_{m-2} + h_m\,\mathfrak{u}_{m-1}$$

ansetzen, wobei $\mathfrak{v}_m$ einer der Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ ist. Nun prüft man leicht nach, daß

$$\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}$$

das auf $\mathfrak{a}$ folgende Glied der GODEAUX-Kette in der v-Richtung ist, denn es ist

$$\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}) + 2b\,\mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a})_1 = 4c\,d\,\mathfrak{a}.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v} - 2a\,\mathfrak{b}$$

das auf $\mathfrak{b}$ folgende Glied in der u-Richtung.

Die Vektoren $\mathfrak{u}_{-1}, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ sind daher (44) entsprechend normiert, wenn wir

$$(45) \qquad \mathfrak{u}_{-1} = -2L\,\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{u}_0 = c\,\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}$$

setzen. Damit wird

$$(46) \qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{e} + \tfrac{1}{2}L^{-1}\,d\,\mathfrak{u}_{-1} + b\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0, \\ \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{e} + 2M\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0 - 2b\,\mathfrak{u}_1 \end{cases}$$

und

$$(47)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{u}_1)_1 = Q\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0, & (\mathfrak{u}_0)_2 = 2c\,\mathfrak{u}_1 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_0, \\ (\mathfrak{u}_2)_1 = 4c\,d\,\mathfrak{u}_1, & (\mathfrak{u}_1)_2 = \mathfrak{u}_2 + 2b\,\mathfrak{u}_1. \end{cases}$$

Aus dem Ansatz

$$\mathfrak{u}_3 = \mathfrak{d} + g_3\,\mathfrak{u}_1 + h_3\,\mathfrak{u}_2$$

folgt jetzt nach (36), (47), wenn wir $\mathfrak{c}$ mittels (46) ersetzen:

$$(\mathfrak{u}_3)_1 = \beta(\mathfrak{u}_2 - 2M\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0 + 2b\,\mathfrak{u}_1) + Q\,c^{-1}\,g_3\,\mathfrak{u}_0 + 4c\,d\,h_3\,\mathfrak{u}_1 + (g_3)_1\,\mathfrak{u}_1 + (h_3)_1\,\mathfrak{u}_2.$$

Es wird also $(\mathfrak{u}_3)_1$ eine Linearkombination von $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_3$, wie es sein soll, wenn wir g_3 und h_3 bestimmen aus

$$-2\beta M\,c^{-1} + Q\,c^{-1}\,g_3 = 0, \qquad 2b\beta + 4c\,d\,h_3 + (g_3)_1 = 0.$$

Daraus finden wir

$$g_3 = -2d, \qquad h_3 = -a\,c^{-1},$$

also

$$(48)\qquad \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_1 - a\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_2.$$

Da für diesen Vektor nach (46), (47), (36)

$$(49)\qquad (\mathfrak{u}_3)_1 = -2L\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_2, \qquad (\mathfrak{u}_2)_2 = \gamma\,\mathfrak{u}_3 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_2,$$

stellt er wirklich die LAPLACE-Transformierte von $\mathfrak{u}_2$ in der v-Richtung dar.

Die nächsten Schritte liefern in der gleichen Weise

$$(50)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_4 = \mathfrak{f} - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{u}_2 - \frac{a}{2L}\,\mathfrak{u}_3, \\ \mathfrak{u}_5 = \mathfrak{e} + \frac{d}{2L}\,\mathfrak{u}_3 + \frac{b}{c}\,\mathfrak{u}_4, \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{u}_4)_1 = -\frac{\beta c}{2L}\,\mathfrak{u}_3 - 2a\,\mathfrak{u}_4, & (\mathfrak{u}_3)_2 = 2P\left(\mathfrak{u}_4 + \frac{a}{L}\,\mathfrak{u}_3\right), \\ (\mathfrak{u}_5)_1 = Q\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_4, & (\mathfrak{u}_4)_2 = 2c\,\mathfrak{u}_5 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_4. \end{cases}$$

Wie man sieht, treten nach 4 Schritten die gleichen Koeffizienten wieder auf. Jetzt bestätigt man leicht durch Induktion nach k, daß allgemein

$$(52)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_{4k+1} = \mathfrak{e} + \frac{d}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k-1} + \frac{b}{c}\,\mathfrak{u}_{4k}, \\ \mathfrak{u}_{4k+2} = \mathfrak{c} + \frac{2M}{c}\,\mathfrak{u}_{4k} - 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\ \mathfrak{u}_{4k+3} = \mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_{4k+1} - \frac{a}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, \\ \mathfrak{u}_{4k+4} = \mathfrak{f} - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{u}_{4k+2} - \frac{a}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k+3}, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(\mathfrak{u}_{4k+1})_1 = \dfrac{Q}{c}\,\mathfrak{u}_{4k}, & (\mathfrak{u}_{4k+1})_2 = \mathfrak{u}_{4k+2} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\
(\mathfrak{u}_{4k+2})_1 = 4c\,d\,\mathfrak{u}_{4k+1}, & (\mathfrak{u}_{4k+2})_2 = \gamma\,\mathfrak{u}_{4k+3} + \dfrac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, \\
(\mathfrak{u}_{4k+3})_1 = -\dfrac{2L}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, & (\mathfrak{u}_{4k+3})_2 = 2P\left(\dfrac{a}{L}\,\mathfrak{u}_{4k+3} + \mathfrak{u}_{4k+4}\right), \\
(\mathfrak{u}_{4k+4})_1 = -\dfrac{\beta c}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k+3} - 2a\,\mathfrak{u}_{4k+4}, & (\mathfrak{u}_{4k+4})_2 = 2c\,\mathfrak{u}_{4k+5} + \dfrac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+4},
\end{cases} \tag{53}
$$

und zwar sowohl für positive als für negative k[14]).

(52) besagt offenbar, daß in (44)

$$\mathfrak{v}_{m+4} = \mathfrak{v}_m, \qquad g_{m+4} = g_m, \qquad h_{m+4} = h_m. \tag{54}$$

Aus (52) folgt, daß an jeder Flächenstelle die Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{u}_{n+1}$ für jedes n linear unabhängig sind. Würden sie nämlich in einer Hyperebene liegen, so müßte diese sämtliche $\mathfrak{u}_m$ enthalten, und damit wegen (53) auch ihre Ableitungen. Die Flächen der GODEAUX-Kette würden dann sämtlich in dieser Hyperebene liegen. Das ist aber nicht möglich; beispielsweise gehören niemals sämtliche Schmiegtangenten einer Schar einer Fläche, die nicht Regelfläche ist, einem linearen Komplex an.

Für die Vektoren

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}_{4k+1}, \mathfrak{u}_{4k+2} \tag{55}$$

gelten die Ableitungsgleichungen (36) und

$$
\begin{cases}
(\mathfrak{u}_{4k-1})_1 = \dfrac{Q}{2M}\,(\mathfrak{u}_{4k+2} - \mathfrak{c} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}), \\
(\mathfrak{u}_{4k-2})_1 = 4c\,d\,\mathfrak{u}_{4k-1},
\end{cases} \tag{56}
$$

$$
\begin{cases}
(\mathfrak{u}_{4k+1})_2 = \mathfrak{u}_{4k+2} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\
(\mathfrak{u}_{4k+2})_2 = \dfrac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2} + \gamma\left(\mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_{4k+1} - \dfrac{a}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}\right).
\end{cases} \tag{57}
$$

Hierin sind die Koeffizienten von k unabhängig. Es gibt daher eine von u, v unabhängige Projektivität π des R_5 in sich, die die Vektoren (55) der Reihe nach abbildet auf die zu den gleichen Parameterwerten gehörigen

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}_{4k+5}, \mathfrak{u}_{4k+6}.$$

Aus (52) folgt, daß π jeden Vektor $\mathfrak{u}_n$ auf $\mathfrak{u}_{n+4}$ abbildet.

Bei jeder Kongruenzfläche gestattet daher die GODEAUX-*Kette eine im allgemeinen unendliche zyklische Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *von Projektivitäten des* R_5 *in sich, die von der Abbildung* π *erzeugt wird.*

[14]) Für positive k genügt nach einem weiteren Schritt der Hinweis, daß bei der Herleitung nur die Koeffizienten in (46), (47) verwendet wurden, so daß diese sich dauernd weiter reproduzieren müssen. Für negative k beachte man, daß sich die $\mathfrak{u}_{-n}$ mittels (52) eindeutig rekursiv definieren lassen.

Wir zeigen weiter:

Die GODEAUX-*Kette unserer Fläche ist dann und nur dann geschlossen, wenn die Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *endlich ist; ist ihre Ordnung* n*, so hat die* GODEAUX-*Kette genau* $4n$ *verschiedene Glieder.*

Daß die GODEAUX-Kette geschlossen ist, wenn $\pi^n = E$, ist evident, denn in diesem Fall ist

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \mathfrak{u}_m. \tag{58}$$

Ist umgekehrt die GODEAUX-Kette geschlossen, so muß ihre Periode durch 4 teilbar sein. Andernfalls würde sich nämlich nach einem Umlauf ergeben, daß nicht nur $\mathfrak{c}$, sondern auch einer der Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ in der Ebene durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ liegen müßte, was offenbar nicht zutrifft.

Ist $4n$ die Periode, so kann man zunächst nur folgern, daß

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \varrho_m \mathfrak{u}_m$$

mit von 0 verschiedenen Ortsfunktionen $\varrho_m(u, v)$. Setzt man dies ein in die wegen (44), (54) gültige Gleichung

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \mathfrak{v}_m + g_m \mathfrak{u}_{m+4n-2} + h_m \mathfrak{u}_{m+4n-1},$$

so findet man

$$\varrho_m \mathfrak{u}_m = \mathfrak{v}_m + g_m \varrho_{m-2} \mathfrak{u}_{m-2} + h_m \varrho_{m-1} \mathfrak{u}_{m-1}$$

und daraus durch Vergleich mit (44)

$$(\varrho_m - 1)\,\mathfrak{u}_m = g_m(\varrho_{m-2} - 1)\,\mathfrak{u}_{m-2} + h_m(\varrho_{m-1} - 1)\,\mathfrak{u}_{m-1}.$$

Da aber nicht 3 aufeinanderfolgende Glieder der GODEAUX-Kette an jeder Flächenstelle auf einer Geraden liegen können, folgt daraus, daß alle ϱ_m den Wert 1 haben. Also gilt (58) und damit

$$\pi^n = E \tag{59}$$

wie behauptet wurde.

Wir wollen dieses Ergebnis noch etwas erweitern. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{w}_m = \mathfrak{u}_{m+4} - \mathfrak{u}_m. \tag{60}$$

Aus (44), (54) folgt dann

$$\mathfrak{w}_m = g_m \mathfrak{w}_{m-2} + h_m \mathfrak{w}_{m-1}. \tag{61}$$

Die Punkte $\mathfrak{w}_m$ liegen daher auf einer Geraden. Wir wollen zeigen, daß dies die schon in § 1 erwähnte Polare $\boldsymbol{g}$ des linearen Raumes $\boldsymbol{G}$ durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ ist.

Nach Anwendung von (52) auf $\mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{u}_{-1}$ findet man nämlich unter Verwendung von (45)

$$\mathfrak{u}_{-2} = 2c\,\mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{u}_{-3} = \frac{1}{2d}(\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v} - 2a\,\mathfrak{b}) \tag{62}$$

und daraus nach (40)

$$\mathfrak{w}_{-2} = \mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{w}_{-3} = -\frac{1}{2d}\mathfrak{s}. \tag{63}$$

Darin ist die Behauptung enthalten, denn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ spannen nach § 1 die Gerade $\boldsymbol{g}$ auf.

Nach (44), (54) ist

$$\pi\,\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_{m+4}, \tag{64}$$

die Projektivität π induziert also eine Projektivität von $\boldsymbol{g}$ in sich, die wir mit $\pi_{\boldsymbol{g}}$ bezeichnen.

Die Bedingung (58) ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \pi_{\boldsymbol{g}}^{\nu}\,\mathfrak{w}_m = 0. \tag{65}$$

$\pi_{\boldsymbol{g}}^0 = E$ soll dabei die zweizeilige Einheitsmatrix darstellen. Da die Vektoren $\mathfrak{w}_m$ nach (63) nicht alle proportional sind, ist (65) gleichwertig mit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \pi_{\boldsymbol{g}}^{\nu} = 0. \tag{66}$$

Durch Multiplikation mit $\pi_{\boldsymbol{g}} - E$ kann man aus (66) die Beziehung

$$\pi_{\boldsymbol{g}}^{n} = E \tag{67}$$

folgern, die auch aus (59) hervorgeht. (66) besagt aber mehr. Aus (67) folgt nämlich, daß sich die Matrix $\pi_{\boldsymbol{g}}$ auf eine Normalgestalt der Form

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} \tag{68}$$

transformieren läßt, in der ξ_1 und ξ_2 n-te Einheitswurzeln sind[15]). Die Matrix (68) genügt aber nur dann auch (66), wenn diese Einheitswurzeln von 1 verschieden sind. Wir können daraus den Satz folgern:

Wenn die GODEAUX-*Kette einer Kongruenzfläche geschlossen ist mit der Periode* $4n$, *so ist die zugehörige Kongruenz* K *nicht parabolisch.*

Diese Kongruenz ist nämlich genau dann parabolisch, wenn $\boldsymbol{g}$ die Quadrik $\boldsymbol{Q}$ berührt, also wenn $\boldsymbol{g}$ den polaren Raum $\boldsymbol{G}$ durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ trifft. Der Schnittpunkt bleibt bei π fest, er ist also Eigenvektor von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ zum Eigenwert 1! Wir haben aber eben gesehen, daß die Eigenwerte von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ von 1 verschieden sind, wenn die GODEAUX-Kette geschlossen ist.

Die GODEAUX-*Kette einer Kongruenzfläche ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode* $4n$, *wenn* $\pi_{\boldsymbol{g}}$ *der Bedingung* (66) *genügt.*

Aus (66) folgt nämlich (67); da 1 nicht Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ ist, sind $\boldsymbol{g}$ und der Raum $\boldsymbol{G}$ windschief und es folgt (59). Die Bedingung ist daher auch hinreichend.

Es ist jetzt nicht mehr schwer, die Bedingungen anzugeben, die zwischen den Invarianten einer Kongruenzfläche bestehen müssen, damit ihre GODEAUX-Kette geschlossen ist und die Periode $4n$ hat.

[15]) Bekanntlich hat die JORDANsche Normalform einer zweizeiligen Matrix entweder Diagonalgestalt oder sie hat die Form $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Von der letzten Matrix ist aber keine Potenz die Einheitsmatrix.

Zunächst folgt nämlich aus (52), (60) daß

$$(69)\quad \begin{cases} \mathfrak{w}_{-1} = -2d\,\mathfrak{w}_{-3} - \frac{a}{c}\,\mathfrak{w}_{-2}, & \mathfrak{w}_1 = \frac{d}{2L}\,\mathfrak{w}_{-1} + \frac{b}{c}\,\mathfrak{w}_0 \\ \mathfrak{w}_0 = \frac{a\,d}{L}\,\mathfrak{w}_{-3} + \frac{a^2 - L}{2Lc}\,\mathfrak{w}_{-2}, & \mathfrak{w}_2 = -\frac{b\,d}{L}\,\mathfrak{w}_{-1} + \frac{2(M-b^2)}{c}\,\mathfrak{w}_0. \end{cases}$$

Setzen wir also

$$(70)\qquad S = \begin{pmatrix} \frac{d}{2L} & \frac{b}{c} \\ -\frac{b\,d}{L} & \frac{2(M-b^2)}{c} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -2d & -\frac{a}{c} \\ \frac{a\,d}{L} & \frac{a^2-L}{2Lc} \end{pmatrix},$$

so ist bei Verwendung von $\mathfrak{w}_{-3}$ und $\mathfrak{w}_{-2}$ als Basisvektoren

$$(71)\quad \pi_g = S\,T = \frac{1}{L\,c^2}\begin{pmatrix} A\,c\,d & \frac{1}{2}(a\,A - b\,L) \\ -2c\,d(b\,A - a\,M) & -a\,b\,A + L\,b^2 + M\,a^2 - L\,M) \end{pmatrix},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$(72)\qquad A = a\,b - c\,d$$

gesetzt haben.

Es sind also die Bedingungen dafür aufzustellen, daß sich die Matrix (71) auf die Gestalt (68) transformieren läßt. Wir unterscheiden 2 Fälle:

A: $\xi_1 = \xi_2$. π_g ist hier ein Vielfaches der Einheitsmatrix, und das gilt bei jeder Wahl der Basisvektoren. Jedenfalls ist also

$$(73)\qquad a\,A - b\,L = 0, \qquad b\,A - a\,M = 0.$$

Hieraus folgt aber schon, wie man leicht nachprüft, daß die Diagonalglieder in (71) gleich sind[16]).

Wenn also neben (73) die Bedingung erfüllt ist

$$(74)\qquad A\,d = L\,c\,e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}$$

mit zu n teilerfremdem ν, so ist die GODEAUX-*Kette geschlossen und hat genau $4n$ Glieder.*

B: $\xi_1 \neq \xi_2$. Hier genügt es, wenn die charakteristische Gleichung

$$(75)\qquad |\pi_g - \xi E| = 0$$

oder

$$(76)\qquad \xi^2 - p\,\xi + q = 0$$

der Matrix (71) die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 hat.

[16]) Das sieht man sofort, wenn etwa $a \neq 0$. Ist $a = 0$, so ist wegen $L \neq 0$ auch $b = 0$, aus (31). (35) folgt dann $P = Q = 2c\,d$, $\beta\,c + 2L = 0$, $\gamma\,d + 2M = 0$ und daraus mittels (29) die Behauptung.

p und q sind die Spur und die Determinante der Matrix π_g, da nach (70)

7) $$|S| = \frac{M d}{L c}, \qquad |T| = \frac{d}{c}$$

nden wir

8) $$p = \frac{1}{L c^2}(-A^2 + L b^2 + M a^2 - L M), \qquad q = \frac{M d^2}{L c^2}.$$

Die Godeaux-*Kette ist also geschlossen mit der Periode* $4n$, *wenn für diese* nvarianten *gilt*

9) $$p = \xi_1 + \xi_2, \qquad q = \xi_1 \xi_2$$

it zwei von 1 *verschiedenen* n*-ten Einheitswurzeln* ξ_1 *und* ξ_2.

Da die Normalgestalt der Matrix π_g vom Ort auf der Fläche unabhängig t, genügt es, wenn die Bedingungen (73) und (74) oder (79) an einer Stelle uf der Fläche befriedigt sind; sie gelten dann überall[17]). Richtet man daher ie Anfangswerte des in § 1 diskutierten Systems von Differentialgleichungen) ein, daß solche Bedingungen erfüllt sind, so hat die zur Lösung gehörige läche eine geschlossene Godeaux-Kette.

Gibt man also ξ_1 *und* ξ_2 *vor, so hängt die zugehörige Klasse von Kongruenz-ächen mit geschlossener* Godeaux-*Kette der Periode* $4n$ *von zwei beliebigen unktionen einer Veränderlichen ab.*

Werfen wir noch einen Blick auf die Realitätsverhältnisse. Bei hyperolisch gekrümmten Flächen sind die Wurzeln von (76) entweder reell oder onjugiert komplex. Fall A kann hier also nur auftreten für $n = 2$. Im alle B hat man

30) $$\xi_1 = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}, \qquad \xi_2 = e^{-\frac{2\pi i \nu}{n}}$$

it zu n teilerfremdem ν. Nach (78), (79) führt das auf die Bedingungen

31) $$M d^2 = L c^2, \qquad -A^2 + L b^2 + M a^2 - L M = 2 L c^2 \cos\frac{2\pi \nu}{n}.$$

Für elliptisch gekrümmte Flächen können ξ_1 und ξ_2 beliebig gewählt erden; im Fall B gelten hier, wenn wir

32) $$\xi_1 = e^{\frac{2\pi i \nu_1}{n}}, \qquad \xi_2 = e^{\frac{2\pi i \nu_2}{n}}$$

etzen, Bedingungen der Form

33) $$\begin{cases} L c^2 = \varrho\, e^{-\frac{\pi(\nu_1+\nu_2)i}{n}}, & M d^2 = \varrho\, e^{\frac{\pi(\nu_1+\nu_2)i}{n}}, \\ -A^2 + L b^2 + M a^2 - L M = 2\varrho \cos\frac{(\nu_1 - \nu_2)\pi}{n} \end{cases}$$

it reellem von Null verschiedenem $\varrho(u, v)$.

[17]) Das läßt sich auch leicht mittels der Gleichungen aus § 1 verifizieren; insbesondere nd p und q Konstanten.

§ 3. M-Transformation.

Die Punkte

$$(84)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{y} + K\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}_2 + HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{y} + K\mathfrak{x}_1 - H\mathfrak{x}_2 - HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{y} - K\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}_2 - HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{y} - K\mathfrak{x}_1 - H\mathfrak{x}_2 + HK\mathfrak{x} \end{cases}$$

sind die Ecken des Vierseits von DEMOULIN unserer Fläche, die Gerade $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3)$, $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_2)$, $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_3)$ die Kanten dieses Vierseits; denn aus (84) folg nach (16)

$$(85)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1) = 2H(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}), & (\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_2) = 2K(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v}), \\ (\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3) = 2H(\mathfrak{p} - 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}), & (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_3) = 2K(\mathfrak{q} - 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v}). \end{cases}$$

Wir wollen die vom Punkte $\mathfrak{z}_0$ erzeugte Hüllfläche der LIE-Quadrike unserer Fläche untersuchen; statt $\mathfrak{z}_0$ schreiben wir dabei der Kürze halber $\mathfrak{z}$. Obwohl die Rechnung sich im Prinzip für beliebige Projektivminimalfläche genau so führen ließe, wollen wir der Einfachheit halber gleich von vorn herein voraussetzen, daß unsere Fläche eine Kongruenzfläche ist.

Nach (25), (28) ist

$$(86)\qquad H_1 = K_2 = 0, \qquad H_2 = a\,P\,H^{-1}, \qquad K_1 = b\,Q\,K^{-1},$$

wir finden daher

$$(87)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = H\mathfrak{z} + Q\,K^{-1}[(K+b)(\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}) - d(\mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x})], \\ \mathfrak{z}_2 = K\mathfrak{z} + P\,H^{-1}[-c(\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}) + (H+a)(\mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x})]. \end{cases}$$

Aus (84), (87) folgt

$$(88)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = -Q\,K^{-1}[-d(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) + (K+b)(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})], \\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = -P\,H^{-1}[(H+a)(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) - c(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})]. \end{cases}$$

Die Vektoren (88) stellen die Schmiegtangenten unserer Hüllfläche dar. Denn bei jeder Projektivminimalfläche entsprechen bekanntlich die Asymptotenlinien der Hüllflächen der LIE-Quadriken denen der Fläche selbst[18]).

Setzen wir noch

$$(89)\qquad \varrho = \varrho_0 = c\,d - (H+a)(K+b),$$

so ist

$$(90)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = Q\,K^{-1}[d\,\mathfrak{x} - (K+b)\,\mathfrak{s} + 2\varrho\,\mathfrak{b}], \\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = P\,H^{-1}[-(H+a)\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{s} + 2\varrho\,\mathfrak{a}]; \end{cases}$$

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{s}$ sind hierbei durch (40) erklärt.

[18]) Vgl. etwa G. THOMSEN, l. c. [12]). Man beweist den Satz am einfachsten, indem man zeigt, daß jeder der Vektoren (20) einer LAPLACE-Gleichung bezüglich u, v genügt; nach einem Satze von DARBOUX über W-Kongruenzen folgt daraus die Behauptung. Vgl. PD I, § 34.

Für die Ableitungen von ϱ findet man aus (31), (35), (86)

$$\varrho_1 = \varrho(Q K^{-1} + 2H - 2a), \qquad \varrho_2 = \varrho(P H^{-1} + 2K - 2b). \tag{91}$$

Verschwindet also ϱ an einer Stelle unserer Hüllfläche, so gilt das gleiche überall. Die Hüllfläche entartet dann nach (90) in eine Leitgerade der von den Diagonalen der Vierseite von Demoulin erzeugten linearen Kongruenz.

Nehmen wir also weiterhin an, daß $\varrho \neq 0$! Durch nochmalige Differentiation folgt aus (87)

$$\mathfrak{z}_{12} \equiv -P Q H^{-1} K^{-1} \varrho \mathfrak{x} \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x}). \tag{92}$$

Daher wird

$$(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_{12}) = P^2 Q^2 H^{-2} K^{-2} \varrho^2 (\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = -P^2 Q^2 H^{-2} K^{-2} \varrho^2 \varkappa.$$

Führen wir also die Abkürzung ein

$$\Theta = \left(\frac{H K \varepsilon}{P Q \varrho}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{93}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ bei hyperbolisch gekrümmten Flächen so gewählt wird, daß Θ reell ist, während bei elliptisch gekrümmten $\varepsilon = 1$ gesetzt werden kann, und setzen wir

$$\breve{\mathfrak{x}} = \Theta \mathfrak{z}, \tag{94}$$

so ist $\breve{\mathfrak{x}}$ der nach (3) normierte Flächenvektor der Hüllfläche und es ist

$$\breve{\varkappa} = -\varkappa. \tag{95}$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{m} = d\,\mathfrak{x} - (K + b)\,\mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{n} = -(H + a)\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{s}, \tag{96}$$

so ist weiter nach (88)

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{u}} = \Theta^2 (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = \varepsilon H P^{-1} \varrho^{-1} (\mathfrak{m} + 2\varrho\, \mathfrak{b}), \\ \breve{\mathfrak{v}} = \Theta^2 (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = \varepsilon K Q^{-1} \varrho^{-1} (\mathfrak{n} + 2\varrho\, \mathfrak{a}). \end{cases} \tag{97}$$

Für die Vektoren $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gilt

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_1 = (Q K^{-1} - 2a)\,\mathfrak{m}, & \mathfrak{m}_2 = 2(K - b)\,\mathfrak{m}, \\ \mathfrak{n}_1 = 2(H - a)\,\mathfrak{n}, & \mathfrak{n}_2 = (P H^{-1} - 2b)\,\mathfrak{n}, \end{cases} \tag{98}$$

sie stellen also feste Punkte von $\boldsymbol{g}$ dar.

Aus (97) folgt mittels (91), (98), (28), (86), (88)

$$\breve{\mathfrak{u}}_1 = 2\varepsilon H d P^{-1} \varrho^{-1} [-(H + a)(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) + c(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})],$$

wobei diese Ableitung von $\breve{\mathfrak{u}}$ nach (38) die gewöhnliche ist. Andererseits ist nach (18)

$$\breve{\mathfrak{u}}_1 = \breve{\beta}\,\breve{\mathfrak{v}}.$$

Wegen (29) wird daher

$$\breve{\beta} = \frac{2 d H Q}{K P} = -2\frac{\beta H K}{P}. \tag{99}$$

Ebenso ergibt sich

$$\breve{\gamma} = \frac{2c\,K\,P}{H\,Q} = -\,2\gamma\,H\,K\,Q^{-1}. \tag{100}$$

Um $\breve{\mathfrak{a}}$ und $\breve{\mathfrak{b}}$ zu bestimmen, beachten wir, daß nach (18), (10)

$$2\,\mathfrak{a}\,\beta^{-1} = (\mathfrak{u}\,\beta^{-1})_2, \qquad 2\,\mathfrak{b}\,\gamma^{-1} = (\mathfrak{v}\,\gamma^{-1})_1,$$

wobei die Ableitungen wieder die gewöhnlichen sind. Wenden wir das an auf die Fläche $\breve{\mathfrak{z}}$, so finden wir

$$\varepsilon\,\breve{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2\varrho}\,\mathfrak{m} + H\,\mathfrak{v}, \qquad \varepsilon\,\breve{\mathfrak{b}} = -\frac{1}{2\varrho}\,\mathfrak{n} + K\,\mathfrak{u} \tag{101}$$

und daraus durch nochmalige Differentiation

$$\begin{cases} \breve{Q}\,\breve{\mathfrak{u}} = \breve{\mathfrak{a}}_1 = \varepsilon\,H\,\varrho^{-1}(\mathfrak{m} + 2\varrho\,\mathfrak{b}) \\ \breve{P}\,\breve{\mathfrak{v}} = \breve{\mathfrak{b}}_2 = \varepsilon\,K\,\varrho^{-1}(\mathfrak{n} + 2\varrho\,\mathfrak{a}) \end{cases} \tag{102}$$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \breve{\mathfrak{a}}_2 = \tfrac{1}{2}\,P\,H^{-1}(-\,2\varepsilon\,\tilde{\mathfrak{f}} + P\,H^{-1}\,\breve{\mathfrak{u}}) \\ \breve{\mathfrak{q}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \breve{\mathfrak{b}}_1 = \tfrac{1}{2}\,Q\,K^{-1}(-\,2\varepsilon\,\mathfrak{e} + Q\,K^{-1}\,\breve{\mathfrak{v}}). \end{cases} \tag{103}$$

Durch Vergleichen mit (97) ergibt sich aus (102)

$$\breve{P} = Q, \qquad \breve{Q} = P, \tag{104}$$

während man aus (103)

$$2\breve{M}\,\breve{\varkappa} = \breve{\mathfrak{a}}_2 \circ \breve{\mathfrak{a}}_2 = P^2\,L^{-1}(\tilde{\mathfrak{f}} \circ \tilde{\mathfrak{f}} - \varepsilon\,P\,H^{-1}\,\tilde{\mathfrak{f}} \circ \breve{\mathfrak{u}}) = -\tfrac{1}{2}\,P^2\,L^{-1}\,\varkappa$$

und eine entsprechende Gleichung für $\breve{L}$ folgert. Also ist

$$\breve{M} = \tfrac{1}{4}\,P^2\,L^{-1}, \qquad \breve{L} = \tfrac{1}{4}\,Q^2\,M^{-1}. \tag{105}$$

Aus (105), (103) und (97) folgt weiter

$$\breve{\mathfrak{c}} = \breve{\mathfrak{p}} - \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = -\,\varepsilon\,P\,H^{-1}\,\tilde{\mathfrak{f}}, \qquad \breve{\mathfrak{d}} = \breve{\mathfrak{q}} - \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = -\,\varepsilon\,Q\,K^{-1}\,\mathfrak{e}. \tag{106}$$

Nach (105), (19) kann man setzen

$$\breve{H} = -\tfrac{1}{2}\,Q\,K^{-1}, \qquad \breve{K} = -\tfrac{1}{2}\,P\,H^{-1}. \tag{107}$$

Aus (103), (107) folgt dann für die Kanten des Vierseits von DEMOULIN der Fläche $\breve{\mathfrak{z}}$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} - 2\breve{K}\,\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \varepsilon\,P\,H^{-1}\,[-\,c\,\mathfrak{u} + (H + a)\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{q}} - 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon\,Q\,K^{-1}\,[(K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{p}} + 2\breve{K}\,\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \varepsilon\,P\,H^{-1}\,[\varrho^{-1}\,\mathfrak{m} - c\,\mathfrak{u} + (-\,H + a)\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon\,Q\,K^{-1}\,[\varrho^{-1}\,\mathfrak{n} + (-\,K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}\,]. \end{cases} \tag{108}$$

Durch Anwendung der Gleichungen

$$(L\,\gamma^2)_1 = 2\beta\,\gamma^2\,N, \qquad (Q\,\beta)_2 = 2b\,Q\,\beta, \qquad (P\,\gamma)_1 = 2a\,P\,\gamma',$$

in denen die Ableitungen wieder die gewöhnlichen sind, und von (29) auf $\breve{\mathfrak{z}}$ findet man

$$(109) \qquad \breve{N} = 0, \quad \breve{a} = \frac{b\,Q}{2M}, \quad \breve{b} = \frac{a\,P}{2L}, \quad \breve{c} = -\frac{P\,c}{2H\,K}, \quad \breve{d} = -\frac{Q\,d}{2H\,K}.$$

Schließlich ergibt sich etwa durch Anwendung der Gln. (36) für $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ auf $\breve{\mathfrak{z}}$

$$(110) \qquad \breve{\mathfrak{e}} = -\frac{\varepsilon}{2} H^{-1}\mathfrak{d}, \qquad \breve{\mathfrak{f}} = -\frac{\varepsilon}{2} K^{-1}\mathfrak{c}.$$

Gehen wir über zur geometrischen Deutung unserer Formeln! Zunächst folgt aus $\breve{N} = 0$, daß jede Hüllfläche der LIE-Quadriken unserer Fläche wieder Projektivminimalfläche ist[19]). Darüber hinaus gilt aber:

Jede Hüllfläche der LIE-*Quadriken einer Kongruenzfläche ist wieder Kongruenzfläche, sie gehört zur gleichen linearen Kongruenz K.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die Bildpunkte der Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN der neuen Fläche im R_5 in dem von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ aufgespannten linearen Raum liegen. Das folgt aber sofort aus (106) in Verbindung mit (22).

Der GODEAUX-*Kette der neuen Fläche ist dieselbe geschlossene* LAPLACE-*Kette der Periode 4 einbeschrieben wie derjenigen der alten, gegenüberliegende Flächen der einbeschriebenen Kette tauschen dabei die Rollen.*

Auch das folgt sofort aus (106), (110).

Den Übergang von einer Fläche zu einer von ihr verschiedenen Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken wollen wir eine M-Transformation nennen. Dann gilt:

Bei den Kongruenzflächen ist die M-Transformation eine umkehrbare Beziehung, in unserem Fall ist also auch $\mathfrak{x}$ eine M-Transformierte von $\mathfrak{z}$ [19]).

Die beiden ersten Gln. (108) zeigen nämlich, daß 2 der Kanten des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{x}$ gehen, naturgemäß berühren sie sogar die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$.

Wir wollen die Flächen $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ die nullte, erste, zweite und dritte M-Transformierte von $\mathfrak{x}$ nennen. Diese Numerierung hängt natürlich ab von der getroffenen Wahl der Vorzeichen von H und K, sie ist aber festgelegt, wenn die Nummer *einer* M-Transformierten von $\mathfrak{x}$ vorgeschrieben wird.

Wir wollen für unsere Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ die Vorzeichen von H und K beliebig festgelegt denken; die entsprechenden Vorzeichen bei den M-Transformierten sollen dann bestimmt werden nach der Regel:

Ist $\mathfrak{p}(u, v)$ die k-te M-Transformierte von $\mathfrak{q}(u, v)$, so soll $\mathfrak{q}(u, v)$ die $(3 - k)$-te M-Transformierte von $\mathfrak{p}(u, v)$ sein.

Dadurch sind dann die Vorzeichen für unsere M-Transformierten eindeutig festgelegt, und das gleiche gilt für die M-Transformierten höherer Ordnung,

[19]) Diese Sätze gelten für beliebige Projektivminimalflächen. Vgl. MAYER, O.: l. c. [3]).

die man durch wiederholte M-Transformation unserer Fläche erhält. Im Einklang mit dieser Regel wurden die Vorzeichen in (107) gewählt.

Zwei M-Transformierte nennen wir benachbart, wenn die Verbindungsgerade entsprechender Flächenpunkte eine Kante des Vierseits von DEMOULIN der transformierten Fläche ist. Im anderen Fall nennen wir sie gegenüberliegend. $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ sind also gegenüberliegende M-Transformierte, ebenso $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$. Entsprechende Punkte solcher gegenüberliegenden Transformierten werden durch eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN verbunden.

Je zwei benachbarte M-Transformationen einer Kongruenzfläche sind vertauschbar[19]).

Beispielsweise ist zu zeigen, daß die erste M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$ mit der nullten von $\mathfrak{z}_1$ identisch ist. Nach der obigen Regel ist $\mathfrak{x}$ die dritte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$. Die Gerade $\breve{\mathfrak{q}} - 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}}$ verbindet diese nach (85) mit der ersten und berührt diese. Die erste M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$ ist also nach (108) die von $\mathfrak{x}$ verschiedene Brennfläche der von den Geraden $(K+b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}$ erzeugten Kongruenz.

Die Formeln für $\mathfrak{z}_1$ erhalten wir aus denen für $\mathfrak{z}$, indem wir überall H durch $-H$ ersetzen. Ändern wir weiter nichts, so ist dann $\mathfrak{x}$ auch die dritte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$. Damit $\mathfrak{x}$ die zweite Transformierte wird, wie es nach der Regel sein soll, müssen wir noch $\breve{H}$ mit dem negativen Vorzeichen versehen. Dann wird nach (107), (108) für $\mathfrak{z}_1$

$$\breve{H} = \tfrac{1}{2} Q K^{-1}, \qquad \breve{K} = \tfrac{1}{2} P H^{-1}, \tag{111}$$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} - 2\breve{K}\,\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = -\varepsilon P H^{-1}[-c\,\mathfrak{u} + (-H + a)\,\mathfrak{v}] \\ \breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon Q K^{-1}[(K+b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}]. \end{cases} \tag{112}$$

Nach (85) berühren die Vektoren in (112) die zweite M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$, diese ist also die Fläche $\mathfrak{x}$, wie es sein soll. Die zweite Brennfläche der obengenannten Kongruenz wird mit $\mathfrak{x}$ verbunden durch die Geraden $\breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}}$, sie ist also nach (85) die nullte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$. Damit ist die behauptete Vertauschbarkeit bewiesen.

Zeigen wir noch, daß wir auf beiden Wegen für die Transformierte zweiter Ordnung nach der obigen Regel die gleichen Werte von H und K bekommen! Zunächst folgt aus (107), (111):

Zu benachbarten M-Transformierten einer Kongruenzfläche gehören entgegengesetzt gleiche Werte von $\breve{H}$ und $\breve{K}$.

Unsere Transformierte zweiter Ordnung ist nun aber auf beiden Wegen eine zu $\mathfrak{x}$ benachbarte M-Transformierte, das eine Mal von $\mathfrak{z}$, das andere von $\mathfrak{z}_1$. Also ist für sie in beiden Fällen

$$\mathring{H} = -H, \qquad \mathring{K} = -K. \tag{113}$$

Aus (108) erhält man für die M-Transformierten von $\mathfrak{z}$ im Begleittetraeder der Fläche $\mathfrak{x}$ die Darstellungen[20])

$$(114)\qquad \begin{cases} \overset{\circ}{\mathfrak{z}}_0 (=) \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + (A + H\,c + K\,d)\,\mathfrak{x} \\ \overset{\circ}{\mathfrak{z}}_1 (=) -(K+b)\,[\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}] + d\,[\mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x}] \\ \overset{\circ}{\mathfrak{z}}_2 (=) c\,[\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}] - (H+a)\,[\mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x}] \\ \overset{\circ}{\mathfrak{z}}_3 (=) \mathfrak{x}\,. \end{cases}$$

Die Diagonalen des Vierseits von Demoulin von $\mathfrak{z}$ werden nach (106) im R_5 dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ mit $\boldsymbol{Q}$, also von den Vektoren

$$(115)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e} + \mathfrak{f} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + (c-b)\,\mathfrak{u} + (d-a)\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2) \\ \mathfrak{e} - \mathfrak{f} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - (c+b)\,\mathfrak{u} + (d+a)\,\mathfrak{v} = -(\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x})\,. \end{cases}$$

Die erste dieser Geraden, die durch $\mathfrak{x}$ geht, nennen wir die *erste Hauptnormale* der Fläche $\mathfrak{x}$, die zweite, die in der Tangentenebene von $\mathfrak{x}$ liegt, die *zweite Hauptnormale* von $\mathfrak{x}$.

Diese Hauptnormalen der Fläche $\mathfrak{x}$ sind also die Diagonalen des Vierseits von Demoulin jeder M-Transformierten von $\mathfrak{x}$. Umgekehrt sind die Diagonalen des Vierseits von Demoulin von $\mathfrak{x}$ die Hauptnormalen jeder M-Transformierten.

Wir beweisen schließlich noch den Satz:

Die Godeaux*-Kette jeder nichtentarteten M-Transformierten $\mathfrak{z}$ einer Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ ist mit der* Godeaux*-Kette von $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig; es gibt eine Projektivität π_0 des R_5, die jede Fläche $\mathfrak{u}_m(u, v)$ der* Godeaux*-Kette von $\mathfrak{x}$ abbildet auf die Fläche $\overset{\circ}{\mathfrak{u}}_{m+2}(u, v)$ der* Godeaux*-Kette von $\mathfrak{z}$, wobei sich Punkte entsprechen, die zu den gleichen Werten der Parameter gehören.*

Diese Projektivität läßt natürlich $\boldsymbol{Q}$ nicht invariant, sie gehört also nicht zu einer Projektivität oder Korrelation des R_3.

Die Richtigkeit unseres Satzes ergibt sich sofort daraus, daß die Ableitungsgleichungen des Vektorsystems

$$(116)\qquad \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{b}, H\,\mathfrak{v},$$

nämlich (36) und die leicht aus (18) folgenden

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d} + 2H(H\,\mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{b}_2 = P\,H^{-1}(H\,\mathfrak{v}),$$
$$(H\,\mathfrak{v})_1 = 2H\,\mathfrak{b}, \qquad (H\,\mathfrak{v})_2 = H\,\gamma\,c^{-1}(\mathfrak{f} - \mathfrak{b})$$

[20]) Der Punkt mit den Koordinaten (p_0, p_1, p_2, p_3) liegt dann und nur dann auf der Geraden mit den Geradenkoordinaten g_{ik}, wenn $\sum_i g_{ik}\,p_i = 0$. Bei Verwendung der Koordinaten im Begleittetraeder mit den Basisvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ prüft man leicht nach, daß etwa der in (114) zuerst genannte Punkt auf den beiden letzten Geraden (108) liegt.

Das Zeichen (=) soll darauf hinweisen, daß zwischen beiden Seiten nur Gleichheit bis auf einen von Null verschiedenen Faktor besteht, sofern auf die Normierung der Vektoren geachtet wird. Es bedeutet also, daß beide Seiten den gleichen Punkt darstellen.

die gleichen Koeffizienten haben, wie die analog gebildeten für das System

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \qquad -\varepsilon \breve{K} \breve{\mathfrak{u}}, \qquad \varepsilon \breve{\mathfrak{a}}. \tag{117}$$

Es gibt daher eine Projektivität π_0 des R_5, die jede Fläche (116) auf die entsprechende (117) abbildet, für die also insbesondere

$$\pi_0 \mathfrak{v} \,(=)\, \breve{\mathfrak{a}}. \tag{118}$$

Diese bildet dann auch entsprechende LAPLACE-Transformierte der beiden Flächen aufeinander ab und ist daher die gesuchte.

Aus unserem Satz folgt:

Sind 2 Flächen M-Transformierte voneinander, so lassen sich die zu ihren GODEAUX*-Ketten nach § 3 gehörigen Projektivitäten π ineinander transformieren.*

In unserem Fall ist nämlich, wenn $\breve{\pi}$ die zu $\mathfrak{z}$ gehörige π entsprechende Projektivität bezeichnet

$$\breve{\pi} = \pi_0 \pi \pi_0^{-1}. \tag{119}$$

Das gleiche gilt für die zu beiden gehörigen Transformationen π_g. Das folgt aus (119), wenn noch gezeigt wird, daß $\boldsymbol{g}$ bei π_0 invariant ist. Dies ist nicht selbstverständlich, weil $\boldsymbol{Q}$ bei π_0 nicht festbleibt. $\boldsymbol{g}$ hat aber die Eigenschaft, daß jede Verbindungsgerade entsprechender Punkte von $\mathfrak{u}_n$ und $\mathfrak{u}_{n+4}$ für jedes n sie trifft; der Schnittpunkt ist dabei nicht immer der gleiche Punkt von $\boldsymbol{g}$, denn beispielsweise sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ stets verschieden. $\boldsymbol{g}$ ist daher die einzige Gerade mit der genannten Eigenschaft; gäbe es zwei, so müßte jede unserer Verbindungsgeraden, sofern sie nicht durch einen eventuell vorhandenen Schnittpunkt von beiden ginge, in dem von ihnen aufgespannten höchstens dreidimensionalen linearen Unterraum des R_5 liegen. Das gleiche müßte dann für die Flächen der GODEAUX-Kette gelten, was nicht möglich ist.

Für die GODEAUX-Kette der M-Transformierten hat $\breve{\boldsymbol{g}}$ die gleiche Eigenschaft. Also führt π_0 jedenfalls $\boldsymbol{g}$ in $\breve{\boldsymbol{g}}$ über. $\breve{\boldsymbol{g}}$ ist aber als Polare des Raumes durch $\breve{\mathfrak{c}}, \breve{\mathfrak{d}}, \breve{\mathfrak{e}}, \breve{\mathfrak{f}}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{g}$ identisch. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 4. *M*-Diagramm und *M*-System.

Der auf S. 116 bewiesene Vertauschbarkeitssatz gibt uns die Möglichkeit, die M-Transformierten verschiedener Ordnung einer Kongruenzfläche in sehr übersichtlicher Weise durch Punkte einer Euklidischen Ebene zu repräsentieren[19]). Das geschieht nach den folgenden Regeln:

1. Der Fläche $\mathfrak{x}$ wird der Punkt $(0, 0)$ eines festgewählten Parallelkoordinatensystems zugeordnet.

2. Ist einer Fläche der Punkt (x, y) der Ebene zugeordnet, so sollen ihren nullten, ersten, zweiten und dritten M-Transformierten der Reihe nach die Punkte $(x+1, y+1)$, $(x-1, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x-1, y-1)$ entsprechen.

Den Flächen $\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ ordnen wir also der Reihe nach die Punkte $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ zu (vgl. Fig. 1, jeder Kreis bedeutet eine Fläche). Der oben betrachteten M-Transformierten zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$ ist der

Punkt (0, 2) zugeordnet. Man beachte, daß das Verfahren im Einklang steht mit der weiter oben definierten Regel für die gegenseitige Beziehung zweier Flächen, die M-Transformierte erster Ordnung voneinander sind: So entspricht die Lage der Bildpunkte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}_0$ der Tatsache, daß die erstgenannte Fläche die dritte Transformierte der zweitgenannten ist.

Im Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten unserer Ebene werden also die M-Transformierten der verschiedenen Ordnungen unserer Kongruenzfläche dargestellt durch die Punkte, deren Koordinatensumme gerade ist. Wir nennen diese Figur das M-Diagramm unserer Kongruenzfläche, das zugehörige Flächensystem ihr M-System. Offenbar sind die Punkte des Diagrammes so wie die Flächen des Systems untereinander völlig gleichberechtigt.

Allerdings besteht natürlich noch die Möglichkeit, daß verschiedene Punkte des Diagrammes in Wirklichkeit die gleiche Fläche darstellen. Auch können Entartungen vorkommen.

Zwischen den Flächen des im Diagramm dargestellten Systems bestehen sehr enge Zusammenhänge. Wir zeigen zunächst:

Benachbarte nichtentartete M-Transformierte einer Kongruenzfläche entsprechen sich bei einer Korrelation, gegenüberliegende bei einer Projektivität.

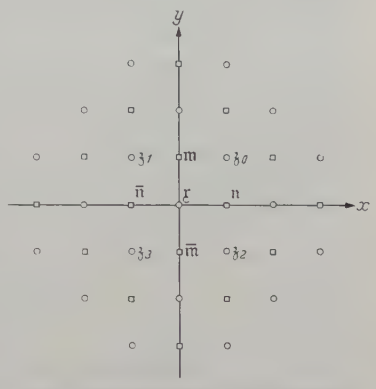

Fig. 1. Jeder Kreis stellt eine Fläche dar, jedes Quadrat einen linearen Komplex.

Das hängt damit zusammen, daß die von den Diagonalen des Vierseits von Demoulin unserer Fläche erzeugten Kongruenzen ein schichtbildendes Paar (couple stratifiable) sind. Wir erinnern an die Definition solcher Paare: Sind 2 Kongruenzen $\mathfrak{g}(u, v)$ und $\mathfrak{h}(u, v)$ durch gleiche Parameterwerte eindeutig aufeinander bezogen, und wählt man auf jeder Geraden von $\mathfrak{g}(u, v)$ einen Punkt $\mathfrak{p}(u, v)$, der stetig von u und v abhängt, so erzeugen diese Punkte eine Fläche. Man kann nun fragen ob sich unsere Punkte so wählen lassen, daß jede Tangentenebene dieser Fläche die entsprechende Gerade $\mathfrak{h}(u, v)$ der anderen Kongruenz enthält. Gibt es unendlich viele Flächen dieser Art, so bilden diese ein einparametriges System und wir nennen dann die Kongruenz $\mathfrak{h}(u, v)$ für $\mathfrak{g}(u, v)$ schichtbildend[21]). Die Flächen des Systems bilden die Geraden von $\mathfrak{g}(u, v)$ projektiv aufeinander ab. Ist gleichzeitig auch $\mathfrak{g}(u, v)$ für $\mathfrak{h}(u, v)$ schichtbildend, so spricht man von einem schichtbildenden Kongruenzpaar.

In unserem Fall sind die von den Ecken des Vierseits von Demoulin erzeugten Flächen solche Schichtflächen für die Diagonalenkongruenzen. Aus jeder solchen Fläche entstehen aber unendlich viele weitere der anderen Schar, wenn man auf die Figur das Nullsystem der linearen Komplexe anwendet,

[21]) Der Begriff stammt von L. Bianchi.

die die Kongruenz enthalten. Je 2 Kongruenzen, die aus Teilen der gleichen linearen Kongruenz bestehen, sind daher stets dann ein schichtbildendes Paar, wenn es wenigstens eine nichtentartete Schichtfläche gibt. Je 2 Flächen verschiedener Scharen entsprechen sich beim Nullsystem eines linearen Komplexes; je 2 der gleichen Schar erhält man auseinander, indem man 2 solche Nullsysteme nacheinander anwendet, sie entsprechen sich daher bei einer Projektivität. Damit ist der angekündigte Satz bewiesen.

Betrachten wir in unserem Fall einmal den vom Punkte $\mathfrak{m}$ dargestellten linearen Komplex. Nach (96) gehört dieser in der gleichen Weise wie zu $\mathfrak{z}_0$ auch zur Fläche $\mathfrak{z}_1$. Die Schmiegtangenten $\breve{\mathfrak{u}}$ der Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ werden nach (97) dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$ des R_5 mit $\boldsymbol{Q}$, sie gehen daher beim zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Nullsystem ineinander über[22]).

Das zum linearen Komplex $\mathfrak{m}$ gehörige Nullsystem führt die M-Transformierten $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ unserer Fläche ineinander über.

Das gilt natürlich nur, wenn $\mathfrak{m}$ nicht auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, also der zugehörige lineare Komplex nicht entartet.

Das gleiche Nullsystem bildet $\mathfrak{x}$ ab auf die vom Punkte (0, 2) des M-Diagrammes dargestellte M-Transformierte zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$.

Es ist nämlich nach (96), (40), (17)

$$\mathfrak{m} \circ [(K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}] = 0, \tag{120}$$

die Geraden, die entsprechende Punkte beider Flächen verbinden, gehören daher dem Komplex $\mathfrak{m}$ an. Das zugehörige Nullsystem bildet beide Brennflächen der von diesen Geraden erzeugten Kongruenz aufeinander ab; wie wir gesehen haben, sind das aber genau die genannten Flächen. Allgemeiner gilt:

Dem Nullsystem des Komplexes $\mathfrak{m}$ entspricht im M-Diagramm die Spiegelung am Punkte (0, 1); zwei Punkte, die bei dieser Spiegelung ineinander übergehen, entsprechen Flächen, die bei diesem Nullsystem einander entsprechen.

Zum Beweis möge der Hinweis genügen, daß eine Korrelation, die 2 Flächen aufeinander abbildet, auch die M-Transformierten der einen auf die der anderen abbildet, und zwar benachbarte auf benachbarte und gegenüberliegende auf gegenüberliegende. Da nun die Fläche (0, 0) auf (0, 2), (1, 1) auf (−1, 1) abgebildet wird, wird (2, 2) in (−2, 0) und allgemein (n, n) in $(-n, 2-n)$ übergeführt. Ebenso sieht man, daß sich $(-n, n)$ und $(n, 2-n)$ entsprechen. Durch nochmalige vollständige Induktion mittels der gleichen Regel folgt die allgemeine Gültigkeit der Behauptung.

Offenbar ist es zweckmäßig, dem Komplex $\mathfrak{m}$ den Punkt (0, 1) des M-Diagrammes zuzuordnen; ebenso gehört zu (1, 0) der Komplex $\mathfrak{u}$. Das läßt sich wieder verallgemeinern:

Von Entartungsfällen abgesehen, kann man jedem Gitterpunkt mit ungerader Koordinatensumme des M-Diagrammes einen linearen Komplex zuordnen; dem Nullsystem des Komplexes entspricht die Spiegelung des Diagrammes an dessen Bildpunkt.

Diese Komplexe sind in den Figuren durch Quadrate dargestellt.

[22]) Vgl. etwa PD I, § 20, Aufg. 1.

Setzen wir noch

$$\overline{\mathfrak{m}} = d\,\mathfrak{x} + (K - b)\,\mathfrak{z}, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = (H - a)\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{z}, \tag{121}$$

so ist dem Komplex $\overline{\mathfrak{m}}$, der durch Vorzeichenwechsel von K aus $\mathfrak{m}$ entsteht, der Punkt $(0, -1)$ zugeordnet, während zu $(-1, 0)$ der Komplex $\overline{\mathfrak{n}}$ gehört.

Spiegelt man eine Ebene der Reihe nach an 2 Punkten, so ist das Endergebnis eine Parallelverschiebung um den doppelten Verbindungsvektor dieser Punkte. Andererseits erhält man durch aufeinanderfolgende Ausübung zweier Nullsysteme eine Projektivität.

Spiegelt man insbesondere das M-Diagramm zuerst an $(0, 1)$, dann an $(1, 0)$, so erhält man die Parallelverschiebung um $(2, -2)$; spiegelt man erst an $(-1, 0)$, dann an $(0, 1)$, so erhält man die Parallelverschiebung um $(2, 2)$. Jeder dieser Parallelverschiebungen entspricht eine projektive Abbildung unseres Flächensystems auf sich, und das gleiche gilt für jede Parallelverschiebung um einen Vektor des Gitters mit den Basisvektoren $(2, 2)$ und $(2, -2)$. Jede Fläche des Systems ist daher projektiv gleichwertig mit einer der 4 Flächen, die von den Punkten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ des M-Diagrammes dargestellt werden.

Die Flächen unseres Systems lassen sich in 4 Klassen einteilen; die Flächen jeder Klasse sind untereinander projektiv gleichwertig. Zwei Flächen gehören dann und nur dann der gleichen Klasse an, wenn der Verbindungsvektor ihrer Bildpunkte im M-Diagramm die Form

$$(2k + 2l, \qquad 2k - 2l) \tag{122}$$

mit ganzzahligen k, l hat.

Je 2 dieser Systeme hängen dadurch zusammen, daß die zu ihnen gehörigen Flächen durch Korrelationen ineinander übergeführt werden können; für 2 Flächen des M-Systems ist das dann der Fall, wenn der Verbindungsvektor ihrer Bildpunkte gerade Komponenten, aber nicht die Form (122) hat.

Nach § 3 sind die Hauptnormalen unserer Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ die Diagonalen des Vierseits von Demoulin jeder ihrer M-Transformierten. Umgekehrt sind die Diagonalen des Vierseits von Demoulin der Fläche $\mathfrak{x}$ die Hauptnormalen jeder ihrer M-Transformierten. Geht man von einer M-Transformierten zu einer benachbarten über, so vertauschen offenbar beide Hauptnormalen ihre Rollen. Das gleiche geschieht daher im M-Diagramm bei einer Verschiebung um $(2, 0)$ oder $(0, 2)$. Daraus folgt:

Von den Flächen jeder unserer 4 Klassen liegen entsprechende Punkte auf einer Geraden — ihrer gemeinsamen Hauptnormale erster Art — und entsprechende Tangentenebenen gehen durch eine zweite Gerade, nämlich ihre gemeinsame Hauptnormale zweiter Art.

Diese Flächen gehören also einer Schar von Schichtflächen der beiden von den Hauptnormalen erzeugten Kongruenzen an. Die zweite Klasse des gleichen Paares — sie besteht aus zu diesen korrelativen Flächen — besteht aus Schichtflächen der anderen Schar.

Die gleichen Hauptnormalen sind die Diagonalen des entsprechenden Vierseits von DEMOULIN für sämtliche Flächen der beiden anderen Klassen.

Die erste Hauptnormale ist die Gerade der Kongruenz K unserer Kongruenzfläche, die durch den Punkt $\mathfrak{x}$ geht. Die zweite Hauptnormale ist diejenige Gerade dieser Kongruenz, die in der Tangentenebene der Fläche liegt. Für die Schnittpunkte der ersten Hauptnormalen mit den Leitgeraden der Kongruenz findet man[23]) mittels (40), (42) die Darstellung

$$\mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + (A \pm g)\,\mathfrak{x}, \tag{123}$$

in der

$$g^2 = A^2 + M(d^2 - a^2) + L(c^2 - b^2) + LM \tag{124}$$

die Diskriminante von (42) bedeutet.

§ 5. Entartungen.

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß die Komplexe $\mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ nicht speziell sein sollten, ihre Bildpunkte im R_5 also nicht auf $\boldsymbol{Q}$ liegen sollten. Auch sollten die M-Transformierten unserer Fläche $\mathfrak{x}$ nicht entarten. Über das Vorkommen solcher Entartungsfälle gilt der Satz:

Die M-Transformierte $\mathfrak{z}_0$ der Fläche $\mathfrak{x}$ entartet dann und nur dann, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ den gleichen linearen Komplex darstellen; dieser ist dann speziell. Ist umgekehrt etwa $\mathfrak{m}$ ein spezieller linearer Komplex, so fällt dieser mit $\mathfrak{n}$ oder mit $\bar{\mathfrak{n}}$ zusammen; im ersten Fall entartet nach dem Vorangehenden $\mathfrak{z}_0$, im zweiten $\mathfrak{z}_1$.

Nach (96), (89) fallen nämlich die Komplexe $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ dann und nur dann zusammen, wenn $\varrho = 0$, also wenn $\mathfrak{z}_0$ entartet. Nach S. 113 stellen die Schnittpunkte der Geraden $(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$ mit $\boldsymbol{Q}$ die Schmiegtangenten $\breve{\mathfrak{u}}$ der Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ dar. Stellt $\mathfrak{m}$ einen speziellen linearen Komplex dar, so fällt dieser Punkt in einen der beiden genannten Schnittpunkte, für die zugehörige Fläche ist dann nach (97) $\varrho = 0$. Damit ist alles bewiesen.

Untersuchen wir noch, welche Besonderheiten das M-System aufweist, wenn etwa $\mathfrak{z}_1$ entartet. $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ entarten in diesem Falle nicht; würde etwa $\mathfrak{z}_0$ entarten, so wäre nach (89) neben $\varrho = 0$ auch

$$c\,d - (-H + a)\,(K + b) = 0;$$

daraus könnte man aber auf $H(K+b) = 0$, also wegen $H \neq 0$ auf $K + b = 0$ schließen, was wegen $c\,d \neq 0$ auf einen Widerspruch führt.

Da andererseits die Komplexe $\mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ speziell sind, müssen von den Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ die M-Transformierten entarten, die durch die Punkte $(0, 2)$ und $(-2, 0)$ des M-Diagrammes dargestellt werden. Nach dem oben formulierten Satz entarten dann auch die zu den Punkten $(1, 2)$ und $(-2, -1)$ des Diagrammes gehörigen linearen Komplexe und sind mit $\mathfrak{m}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ identisch. Schließt man so weiter, so findet man:

[23]) Zur Nachprüfung kann man die in [20]) angegebene Regel verwenden.

Entartet $\mathfrak{z}_1$, so stellen alle Punkte des M-Diagrammes, für die $y = x + 1$ ist, den gleichen linearen Komplex dar. Die von den Punkten der Geraden $y = x$ dargestellten Flächen entarten nicht. Die von den Punkten der Geraden $y = x + 2$ dargestellten Flächen entarten sämtlich.

Von diesen letzten Flächen fallen im übrigen diejenigen, für die x ungerade ist, mit $\mathfrak{z}_1$ zusammen, während auch von den übrigen, für die also x gerade ist, entsprechende Punkte zusammenfallen. Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die von $(0, 2)$ und $(-2, 0)$ dargestellten Flächen punktweise identisch sind. Nun ist die erstgenannte Fläche die zweite Brennfläche derjenigen Berührkongruenz von $\mathfrak{x}$, deren Strahlen $\mathfrak{m}$ angehören; für die zweite gilt das gleiche in bezug auf $\bar{\mathfrak{n}}$. Da $\mathfrak{m}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ den gleichen Komplex darstellen, sind beide Flächen wirklich identisch, der zugehörige Flächenpunkt ist der Schnittpunkt der Tangentenebene von $\mathfrak{x}$ mit der Leitgeraden des Komplexes.

Dann und nur dann entartet eine der M-Transformierten der Fläche $\mathfrak{x}$, wenn die Matrix der zur GODEAUX*-Kette gehörigen Projektivität π_g zusammenfallende charakteristische Wurzeln hat.*

Einerseits folgt nämlich aus $\varrho = 0$ zunächst

$$A + HK = -Hb - Ka. \tag{125}$$

Quadriert man dies, so ergibt sich nach (78)

$$Lc^2 p = -A^2 - LM + Lb^2 + Ma^2 = -2HKcd \tag{126}$$

und deshalb

$$p^2 - 4q = 0, \tag{127}$$

so daß (76) zusammenfallende Wurzeln hat.

Andererseits führt (127) zunächst auf

$$p = \pm 2\sqrt{q} = \pm 2\frac{Kd}{Hc}. \tag{128}$$

Gilt hier das Minuszeichen, so folgt (126) und daraus entweder (125) oder

$$A + HK = Hb + Ka. \tag{129}$$

Im ersten Fall entartet $\mathfrak{z}_0$, im zweiten $\mathfrak{z}_3$, denn (129) entsteht aus (125) durch Vorzeichenwechsel von H und K. Gilt aber in (128) das Pluszeichen, so bedeutet das einen Vorzeichenwechsel etwa von H allein in unseren Bedingungen, also entartet dann $\mathfrak{z}_1$ oder $\mathfrak{z}_2$.

Im übrigen ist

$$p^2 - 4q = L^2 c^4 \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3, \tag{130}$$

wobei $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die ϱ_0 entsprechenden zu $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_3$ gehörigen Invarianten sind. Weiter bemerken wir, daß (126) nach (124) gleichbedeutend ist mit

$$g^2 = (Kd + Hc)^2. \tag{131}$$

Nehmen wir weiterhin an, daß $\mathfrak{z}_1$ entartet. Für die weitere Diskussion unterscheiden wir 2 Fälle.

a) $\mathfrak{z}_2$ entartet nicht. Die Komplexe $\mathfrak{n}$ und $\overline{\mathfrak{m}}$ sind dann nicht speziell und fallen nicht zusammen. Wenden wir nun auf unser System das zum Komplex $\mathfrak{n}$ gehörige Nullsystem an, so gehen Flächen ineinander über, deren Bildpunkte in bezug auf (1, 0) gespiegelt liegen. Daher stellen die Punkte der Geraden $y = x - 4$ in diesem Fall ebenfalls entartete Flächen dar. Die von den Punkten der Geraden $y = x - 3$ dargestellten linearen Komplexe sind speziell und fallen zusammen. Nur die Flächen entarten nicht, die von den Punkten der Geraden $y = x$ und $y = x - 2$ dargestellt werden. Jede dieser

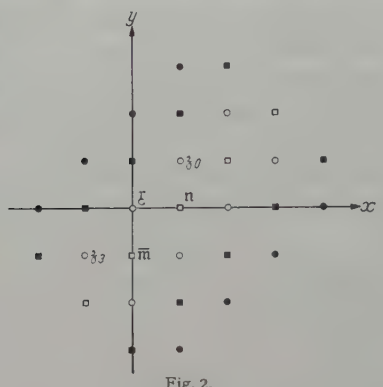

Fig. 2.

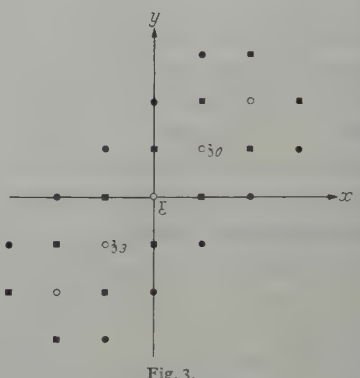

Fig. 3.

Flächen hat eine entartete M-Transformierte, gehört also ebenfalls zum betrachteten Fall a). Nur die Punkte der Geraden $y = x - 1$ stellen nichtspezielle lineare Komplexe dar. Man vergleiche die Fig. 2, in der entartete Flächen und Komplexe durch ausgefüllte Kreise und Quadraten dargestellt sind.

b) $\mathfrak{z}_2$ entartet ebenfalls. In diesem Fall sind nicht nur die von den Punkten der Geraden $y = x + 1$ dargestellten Komplexe speziell, sondern auch die von den Punkten der Geraden $y = x - 1$ (Fig. 3). Die Punkte, für die $y = x - 2$ stellen entartete Flächen dar, nur die Flächen für die $y = x$ sind nichtentartet. Da von jeder dieser Flächen 2 gegenüberliegende M-Transformierte entarten, gehören sämtliche Flächen des M-Systems ebenfalls zu b).

Kennzeichnend für die Flächen dieser Unterklasse ist, daß die Matrix (71) *der Projektivität* π_g *mit der Einheitsmatrix proportional ist.*

Die Flächen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ entarten nämlich dann und nur dann, wenn analog zu (125)

$$A - HK = Hb - Ka, \qquad A - HK = -Hb + Ka. \tag{132}$$

Diese Bedingungen sind gleichwertig mit

$$A - HK = 0, \qquad Hb - Ka = 0, \tag{133}$$

aus denen sich sofort (73) schließen läßt. Umgekehrt folgt aus (73) entweder (132) oder

$$A + HK = Hb + Ka, \qquad A + HK = -Hb - Ka^{16}). \tag{134}$$

Die letzteren Bedingungen bedeuten, daß $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ entarten.

§ 6. Klasseneinteilung.

Bei der Klassifikation der reellen Kongruenzflächen können, insbesondere wenn die Realitätsverhältnisse beachtet werden, mehrere Merkmale herangezogen werden; dadurch ergeben sich zahlreiche Klassen und Unterklassen.

1. Mit der Einteilung der Flächen in hyperbolisch und elliptisch gekrümmte verbinden wir die nach der Beschaffenheit ihrer M-Transformierten:

I) Elliptisch gekrümmte Flächen. Zwei gegenüberliegende M-Transformierte, etwa $\mathfrak{d}_0$ und $\mathfrak{d}_3$ sind hier stets reell. Je 2 sich in $\mathfrak{d}_0$ oder $\mathfrak{d}_3$ schneidende Kanten des Vierseits von DEMOULIN sind konjugiert komplex, die Diagonalen dieses Vierseits aber reell.

II) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit 4 reellen M-Transformierten. Kanten und Diagonalen der DEMOULINschen Vierseite sind sämtlich reell. Für diese Flächen ist $L > 0$, $M > 0$.

III) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit komplexen M-Transformierten. Das Vierseit von DEMOULIN hat reelle Diagonalen, je 2 gegenüberliegende Kanten sind konjugiert komplex. Hier ist $L < 0$, $M < 0$.

IV) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit komplexen M-Transformierten. Jedes Vierseit von DEMOULIN hat konjugiert komplexe Diagonalen, 2 gegenüberliegende Kanten sind reell, die beiden andern konjugiert komplex. Hierfür ist $LM < 0$ kennzeichnend.

2. Beschaffenheit der Kongruenz K. Wir haben folgende Fälle:

E) K ist elliptisch, die Schnittpunkte von $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{Q}$ sowie die Leitgeraden von K sind konjugiert komplex. $g^2 < 0$.

H) K ist hyperbolisch. Die genannten Schnittpunkte sind reell verschieden, ebenso die Leitgeraden von K. $g^2 > 0$.

P) K ist parabolisch. $\boldsymbol{g}$ berührt $\boldsymbol{Q}$. $g^2 = 0$.

S) K ist singulär, eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN liegt in einer festen Ebene, die andere geht durch einen festen Punkt. Bei diesen Flächen ist

$$L - a^2 + d^2 = 0, \qquad a\,c - b\,d = 0, \qquad M - b^2 + c^2 = 0.$$

Natürlich ist S) ein Sonderfall von P).

3. Beschaffenheit der Fixpunkte und Eigenwerte von $\pi_{\boldsymbol{g}}$. Diese können sein

a) verschieden: $p^2 - 4q \neq 0$;

b) zusammenfallend: $p^2 - 4q = 0$.

c) Die Eigenwerte fallen zusammen, die Fixpunkte bilden eine Gerade: $a\,A - b\,L = 0$, $b\,A - a\,M = 0$.

Dieser Fall ist ein Sonderfall von b).

Es fragt sich, ob die sich durch Kombination der 3 Einteilungen ergebenden 48 Möglichkeiten alle vorkommen. Zunächst ist zu beachten, daß jede Fläche der Klasse S) zu c) gehört. Denn es liegt $\boldsymbol{g}$ ganz im Raum durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und deshalb ist $\pi_{\boldsymbol{g}} = E$.

Weiter ist Fall IV) nicht mit b) oder c) vereinbar. Denn es gäbe eine entartete M-Transformierte, die konjugiert komplexe wäre zu ihr benachbart und müßte ebenfalls entarten. Nach § 5 ist das nicht möglich.

Fall b) ist nur dann möglich, ohne daß c) gilt, wenn die entartete M-Transformierte reell ist. Andernfalls müßte ja die konjugiert komplexe M-Transformierte ebenfalls entarten. Also sind die Fälle III) und IV) mit b) nicht vereinbar. Da weiter die entartete M-Transformierte Teil einer Leitgeraden von K ist, sind diese Leitgeraden reell, so daß b) auch nicht mit E) vereinbar ist.

Im Falle c) sind 2 gegenüberliegende M-Transformierte entartet; da beide auf Leitgeraden von K liegen, kann die Fläche nicht zu P) gehören, ohne schon in S) zu liegen. Gehört die Fläche zu II), so sind diese M-Transformierten reell und E) ist daher nicht möglich. Gehört sie zu III), so sind die M-Transformierten konjugiert komplex. Da sie von den Schnittpunkten einer reellen Geraden mit den Leitgeraden von K erzeugt werden, sind diese konjugiert komplex und die Fläche gehört zu E) oder zu S), während H) und P) nicht möglich sind.

	E			H			P			S
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	c
I	*		*	*		*				
II				*		*				
III			*							
IV										

Fig. 4.

Die Kombinationen, die auf Grund dieser Bemerkungen nicht vorkommen können, sind in der folgenden Tabelle mit einem Kreuz versehen. Es bleiben 23 Möglichkeiten; von diesen kann man durch Wahl geeigneter Werte von L, M, a, b, c, d in einem Anfangspunkt zeigen, daß sie alle wirklich realisierbar sind. Wir wollen das jedoch hier nicht durchführen[24]).

Bei hyperbolisch gekrümmten Flächen ist π eine reelle Abbildung des Geradenraumes. Für sie ist es also sinnvoll, Klasse a) weiter zu unterteilen in

a_r) π_g hat reelle Fixpunkte: $\quad p^2 - 4q > 0;$

a_k) π_g hat konjugiert komplexe Fixpunkte: $\quad p^2 - 4q < 0.$

Der letztgenannte Fall kann aber nur vorkommen bei Flächen, die zu II) und H) gehören. Die Fixpunkte von π_g trennen nämlich nach § 9, 2. die Schnittpunkte von g mit Q harmonisch, von beiden Punktepaaren ist also mindestens eines reell. Daher ist a_k) mit E) nicht vereinbar; ebensowenig aber mit P), denn hier fällt ein Fixpunkt in den reellen Berührungspunkt von g mit Q. Schließlich sind bei III) oder IV) die Größen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ paarweise konjugiert komplex und daher ist nach (130) auch hier $p^2 - 4q > 0$.

Daß eine Fläche der Klasse IIH) tatsächlich sowohl zu a_r) als zu a_k) gehören kann, zeigt man wieder durch Beispiele.

Die Klassen, in denen Flächen mit geschlossener GODEAUX-Kette vorkommen, sind in der Tabelle mit einem Stern bezeichnet. Die hyperbolisch gekrümmten, deren GODEAUX-Kette nicht die Periode 8 hat, gehören alle zur Klasse II H a_k).

Die reellen nichtentarteten Flächen eines M-Systems gehören alle der gleichen Klasse an.

[24]) Man vgl. auch § 9, Bemerkungen 5 und 6.

Daß die reellen M-Transformierten einer elliptisch gekrümmten Kongruenzfläche wieder elliptisch gekrümmt sind, folgt aus der Invarianz der Asymptotenlinien; entsprechendes gilt bei hyperbolischer Krümmung. Die Invarianz der Klassen II), III), IV) bei M-Transformation ergibt sich aus (105), die der Klasseneinteilung 2. daraus, daß die Kongruenz K bei M-Transformation invariant ist. Die Invarianz der Klasseneinteilung 3. folgt aus dem in § 3 nachgewiesenen Transformationsverhalten von π_g.

§ 7. Die Gruppe des M-Systems.

Wir haben in § 4 gesehen, daß jeder Parallelverschiebung des M-Diagrammes um einen der Vektoren

$$k(2, 2) + l(2, -2) \tag{135}$$

eine projektive Abbildung des M-Systems auf sich entspricht. Die von diesen Projektivitäten gebildete Gruppe wollen wir jetzt noch untersuchen. Sie ist isomorph zur Gruppe der Translationen (135); diese Isomorphie ist aber immer dann mehrstufig, wenn gewissen der Parallelverschiebungen die identische Projektivität entspricht.

Bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Gruppe der Verschiebungen (135), so bilden diejenigen ihrer Elemente, denen die identische Projektivität entspricht, eine Untergruppe $\mathfrak{T}_0$, und die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Projektivitäten des M-Systems in sich ist dann einstufig isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_0$. Die zu den Elementen von $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Vektoren (135) bilden einen Untermodul dieses Vektorsystems. Wir nennen diese Vektoren die Perioden des M-Systems.

Wir setzen uns zum Ziel, die Gruppe $\mathfrak{G}$ zu den absoluten Invarianten p und q der Kongruenzfläche in Beziehung zu setzen, bzw. zu den Wurzeln ξ_1 und ξ_2 der zugehörigen charakteristischen Gl. (76).

Betrachten wir zunächst die in § 5 untersuchten Entartungsfälle. Hier gehören nur zu den Vektoren $k(2, 2)$ Projektivitäten, und es fragt sich, ob zu einem solchen Vektor für $k \neq 0$ die identische Projektivität gehören kann.

Jede unserer Projektivitäten läßt sämtliche Geraden der Kongruenz K fest. Man überzeugt sich nun leicht, daß 2 derartige Projektivitäten P_1, P_2 identisch sind, wenn sie auf *einer* Geraden g dieser Kongruenz die gleiche Wirkung haben. Betrachtet man nämlich eine Quadrik, von der eine Geradenschar aus Geraden von K besteht, unter denen auch g vorkommt, so bleibt bei $P_1 P_2^{-1}$ jede Gerade der anderen Schar von Q fest, da das für ihren Schnittpunkt mit g gilt. Also bleibt jeder Punkt von Q bei $P_1 P_2^{-1}$ fest und diese Projektivität ist die identische[25]).

Es genügt daher in unserem Fall, die Wirkung der zu (2, 2) gehörigen Projektivität auf eine feste Hauptnormale unserer Fläche zu kennen. Offenbar wird in dieser eine Projektivität Γ induziert, deren Fixpunkte die Schnittpunkte i und j unsrer Normalen mit den Leitgeraden der Kongruenz K sind.

[25]) Dieser Beweis versagt, wenn K singulär ist. Statt der Quadriken kann man hier über die Büschel des zu K gehörigen Geradenbündels verwenden.

Sie werden durch (123) dargestellt, es ist also etwa

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{p} + g\,\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{j} = \mathfrak{p} - g\,\mathfrak{x}, \tag{136}$$

wobei

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + A\,\mathfrak{x}. \tag{137}$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Kongruenz K nicht parabolisch ist, so daß $g \neq 0$. Ist dann $\mathfrak{q}$ ein von den Fixpunkten verschiedener Punkt unserer Hauptnormalen, so ist das Doppelverhältnis

$$D = (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{q}, \Gamma\mathfrak{q}) \tag{138}$$

von der Wahl von $\mathfrak{q}$ unabhängig und kennzeichnet Γ. Setzen wir $\mathfrak{q} = \mathfrak{x}$, so ist nach der ersten Gl. (114)

$$\Gamma\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + (H\,c + K\,d)\,\mathfrak{x} \tag{139}$$

und wir finden

$$D = \frac{g + H\,c + K\,d}{g - H\,c - K\,d}. \tag{140}$$

Da $\mathfrak{d}_{01}$ entartet, ist in unserm Fall analog zu (126), (131)

$$p = 2\frac{K\,d}{H\,c}, \qquad g^2 = (K\,d - H\,c)^2; \tag{141}$$

legen wir das Vorzeichen von g fest durch

$$g = K\,d - H\,c \tag{142}$$

und beachten wir, daß $\xi_1 = \xi_2$, so finden wir

$$D = \frac{K\,d}{H\,c} = \xi_1 = \xi_2. \tag{143}$$

Entartet eine Fläche des M-Systems, so ist die Gruppe des M-Systems genau dann endlich, wenn es die Gruppe der GODEAUX*-Kette ist; beide Gruppen haben die gleiche Ordnung.*

Die Projektivität Γ hat nämlich genau dann die Ordnung n, wenn $D^n = 1$.

Hat K zusammenfallende Leitlinien, so versagt die Kennzeichnung von Γ durch das Doppelverhältnis D. In diesem Fall läßt sich aber Γ darstellen durch

$$\Gamma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \qquad \Gamma\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \frac{1}{H\,c + K\,d}\,\mathfrak{p}, \tag{144}$$

denn dies ist bis auf Umnormungen die einzige Projektivität unserer Hauptnormalen in sich mit dem doppelten Fixpunkt $\mathfrak{p}$, die den Punkt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{p} + (H\,c + K\,d)\,\mathfrak{x}$ abbildet.

In diesem Fall haben also sowohl π wie Γ stets unendliche Ordnung und der obige Satz bleibt richtig[26]).

Wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Fall zu, nehmen wir also an, daß sämtliche Punkte des M-Diagrammes nichtentartete Flächen darstellen. Zu-

[26]) Er gilt auch, wenn K singulär ist. $\mathfrak{p}$ ist dann fest, also das Zentrum des zu K gehörigen Geradenbündels.

nächst sei K wieder parabolisch. Zum Vektor (2, 2) des M-Diagrammes gehört dann wieder die durch (144) dargestellte Projektivität Γ unserer Hauptnormalen in sich, zu $(-2, 2)$ ebenso die Projektivität Γ_1 für die

$$\Gamma_1 \mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \qquad \Gamma_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \frac{1}{-Hc + Kd}\mathfrak{p}. \tag{145}$$

Zum Vektor (135) gehört daher dann und nur dann die identische Projektivität, wenn

$$\frac{k}{Hc + Kd} + \frac{l}{-Hc + Kd} = 0.$$

Ist die Kongruenz K parabolisch, so besteht $\mathfrak{T}_0$ genau dann nicht nur aus der Identität, wenn die Zahl $\frac{Kd}{Hc} = R$ rational ist; ist

$$\frac{R-1}{R-1} = -\frac{r}{s}$$

mit ganzzahligen teilerfremden r, s, so besteht $\mathfrak{T}_0$ aus allen Vielfachen des Vektors

$$r(2, 2) + s(-2, 2).$$

Die Bedingung bedeutet nach (78), daß $q = \xi_1 \xi_2$ Quadrat einer rationalen Zahl sein soll.

Ist K nicht parabolisch, so gehört zu (2, 2) wieder die Projektivität mit dem Doppelverhältnis (140) unserer Hauptnormalen in sich, die i und j festläßt. Ebenso gehört zu $(-2, 2)$ eine ebensolche Projektivität Γ_1 mit dem Doppelverhältnis

$$D_1 = \frac{g - Hc + Kd}{g + Hc - Kd}. \tag{146}$$

Zum Vektor (135) gehört dann und nur dann die identische Abbildung unserer Hauptnormalen, wenn

$$D^k D_1^l = 1. \tag{147}$$

Dieses Ergebnis ist jedoch wenig übersichtlich und wir wollen deshalb noch etwas anders vorgehen. Der Anschaulichkeit halber setzen wir dabei voraus, daß K elliptisch ist. Die Formeln, die wir erhalten, lassen sich aber auch im hyperbolischen Fall verwenden.

Die Schnittpunkte I und J der Geraden $\boldsymbol{g}$ des R_5 mit $\boldsymbol{Q}$ sind in diesem Fall konjugiert komplex; die Schnittpunkte der von diesen Punkten dargestellten Leitgeraden der Kongruenz K mit unserer Hauptnormalen seien wieder durch i, j bezeichnet.

Die Projektivitäten der Gruppe $\mathfrak{G}$ werden nach § 4 erzeugt von den Nullsystemen gewisser linearer Komplexe, deren Bildpunkte im R_5 auf $\boldsymbol{g}$ liegen.

Ist nun $\mathfrak{k}$ ein Punkt von $\boldsymbol{g}$, der nicht auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, $\mathfrak{l}$ der zu $\mathfrak{k}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ konjugierte Punkt von $\boldsymbol{g}$, so bewirkt das zum Komplex $\mathfrak{k}$ gehörige Nullsystem im R_5 eine Projektivität π_1, für die bei geeigneter Normierung

$$\pi_1 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \pi_1 \mathfrak{d} = \mathfrak{d}, \quad \pi_1 \mathfrak{e} = \mathfrak{e}, \quad \pi_1 \mathfrak{f} = \mathfrak{f}, \quad \pi_1 \mathfrak{l} = \mathfrak{l}, \quad \pi_1 \mathfrak{k} = -\mathfrak{k}. \tag{148}$$

Zu jeder von unseren Nullsystemen erzeugten Projektivität oder Korrelation des R_3 gehört eine Projektivität des R_5, die bei geeigneter Normierung ebenfalls die Vektoren $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ festläßt. Stellen wir die Punkte von $\boldsymbol{g}$ in der Form $\lambda\,\mathfrak{x} + \mu\,\mathfrak{z}$ dar, so bewirkt diese Projektivität eine homogene lineare Transformation von λ, μ, die sie vollständig festlegt und die die Determinante ± 1 hat. Denn das gilt für jede der Projektivitäten (148), von denen sie erzeugt wird.

Wir betrachten nun λ, μ als affine Koordinaten einer Hilfsebene. Jedem Punkt von $\boldsymbol{g}$ entspricht dann in dieser Hilfsebene eine Gerade durch den Nullpunkt. Die Gerade, die in dieser Weise dem Punkte $\mathfrak{k}$ entspricht, wollen wir auch als Bild des linearen Komplexes $\mathfrak{k}$ in unserer Hilfsebene auffassen.

Wir führen nun in unserer Hilfsebene, die wir auch das Komplexbild der Kongruenzfläche nennen, eine Euklidische Metrik ein, bei der die Bildgeraden von I und J die isotropen sind. Da diese bei jeder unserer Transformationen festbleiben oder vertauscht werden, sind dann die zu ihnen gehörigen Affinitäten der Determinante ± 1 des Komplexbildes in dieser Metrik Bewegungen. Insbesondere läßt die zu (148) gehörige Affinität die Bildgerade von $\mathfrak{k}$ punktweise fest, sie ist also die Spiegelung an dieser Bildgeraden.

Dem Nullsystem eines linearen Komplexes, dem die Geraden unserer linearen Kongruenz angehören, entspricht also im Komplexbild die Spiegelung an der Senkrechten zur Bildgeraden dieses Komplexes.

Der Projektivität des R_3, die durch aufeinanderfolgende Ausübung der Nullsysteme zweier unserer Komplexe entsteht, entspricht die Bewegung des Komplexbildes, die durch nacheinanderfolgende Spiegelung an den Senkrechten zu den Bildgeraden dieser Komplexe entsteht, also die Drehung um den doppelten Winkel dieser Senkrechten, oder auch der Bildgeraden selbst.

Zur Drehung des Komplexbildes um 180° gehört insbesondere die Spiegelung des R_3 an den Leitgeraden der Kongruenz K; denn diese ist die einzige involutorische Projektivität des R_3, die die Kongruenzgeraden einzeln festläßt.

Seien nun $m, n, \overline{m}, \overline{n}$ die Bildgeraden der Komplexe $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}, \overline{\mathfrak{n}}$. Die Projektivität, die der Verschiebung des M-Diagrammes um den Vektor (2, 2) entspricht, erhält man als Produkt der Nullsysteme von $\overline{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{m}$, aber auch von denjenigen von $\overline{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{n}$. Im Komplexbild entspricht ihr also Drehung um den doppelten Winkel von $\overline{n}$ nach m, aber auch Drehung um den doppelten Winkel von $\overline{m}$ nach n. Beide Winkel sind also gleich. Das bedeutet, daß die Geradenpaare $(m, \overline{m})$ und $(n, \overline{n})$ die gleichen Winkelhalbierenden haben. Projektiv gesprochen heißt das, daß sie mit den Isotropen einer Involution angehören. Das läßt sich auch rechnerisch leicht bestätigen, denn nach (96), (121) genügen die zum Paare $\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}$ gehörigen Werte von λ, μ der Gleichung

$$f(\lambda, \mu) = (M - b^2)\,\lambda^2 - 2\,b\,d\,\lambda\mu - d^2\mu^2 = 0, \tag{149}$$

die zu $\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{n}}$ gehörigen der Gleichung

$$g(\lambda, \mu) = -\,c^2\,\lambda^2 - 2\,a\,c\,\lambda\mu + (L - a^2)\,\mu^2 = 0, \tag{150}$$

während die Punkte I, J nach (42) dargestellt werden durch

$$f(\lambda,\mu) - g(\lambda,\mu) = 0. \tag{151}$$

Wir verwenden die Winkelhalbierenden jetzt noch als Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems im Komplexbild; die Koordinaten x, y dieses Systems hängen dann durch eine homogene affine Transformation mit λ, μ zusammen.

Schließen $m, \bar{m}$ mit der x-Achse dieses Systems die Winkel $\pm\varphi$; $n, \bar{n}$ die Winkel $\pm\psi$ ein, so wird das erste Geradenpaar dargestellt durch

$$F(x,y) = \cos^2\varphi\, y^2 - \sin^2\varphi\, x^2 = 0, \tag{152}$$

das zweite durch

$$G(x,y) = \cos^2\psi\, y^2 - \sin^2\psi\, x^2 = 0. \tag{153}$$

Bei der obengenannten affinen Transformation ist

$$F(x,y) = r f(\lambda,\mu), \qquad G(x,y) = r g(\lambda,\mu). \tag{154}$$

Daß hier in beiden Gleichungen der gleiche Proportionalitätsfaktor steht, folgt daraus, daß $F(x,y) - G(x,y)$ mit $x^2 + y^2$ proportional ist, gleich Null gesetzt also die Isotropen darstellt, und beim Umrechnen in (151) übergehen muß.

Für unsere Involution haben wir jetzt die Darstellung

$$F(x,y) - \xi G(x,y) = r[f(\lambda,\mu) - \xi g(\lambda,\mu)] = 0. \tag{155}$$

Die zu ihren Doppelelementen gehörigen Werte von ξ sind nach (149), (150) die Wurzeln der Gleichung

$$L c^2 \xi^2 - (-A^2 + L b^2 + M a^2 - L M)\xi + M d^2 = 0; \tag{156}$$

sie sind also identisch mit den Wurzeln ξ_1, ξ_2 der charakteristischen Gl. (76) von π_g.

Andererseits ist nach (152), (153) etwa

$$\xi_1 = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}, \qquad \xi_2 = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}; \tag{157}$$

Zwischen den Winkeln φ, ψ und den Wurzeln der charakteristischen Gleichung von π_g bestehen die Beziehungen (157).

Aus (157) folgt durch Auflösen

$$\sin^2\varphi = \frac{\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}, \qquad \sin^2\psi = \frac{1-\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}; \tag{158}$$

daraus sieht man, daß die Figur der Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ bis auf die Vertauschungen, die dem Wechseln der Vorzeichen von H und K entsprechen, eindeutig festgelegt ist.

Der zum Vektor (2, 2) des M-Diagrammes gehörigen Projektivität entspricht im Komplexbild das Produkt der Spiegelungen an n und m, also die

Drehung um $2(\varphi+\psi)$. Ebenso bewirkt die zu $(-2, 2)$ gehörige Projektivität eine Drehung um $2(\varphi-\psi)$.

Zum Vektor (135) gehört also dann und nur dann die identische Projektivität, wenn

$$2k(\varphi+\psi)+2l(\varphi-\psi)=2N\pi \tag{159}$$

mit ganzzahligem N:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ des M-Systems ist dann und nur dann endlich, wenn φ und ψ beide zu π rational sind.

Denn das tritt dann und nur ein, wenn (159) zwei linear unabhängige Lösungen für k, l hat; die zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Vektoren bilden dann ein Teilgitter von (135).

Es sei noch hervorgehoben, daß sämtliche betrachteten Fälle wirklich vorkommen. Man kann ja die Anfangswerte des in § 1 aufgestellten Systems von Differentialgleichungen so wählen, daß p und q für die zugehörige Fläche beliebige Werte haben, nur $q=0$ ist auszuschließen. Es gibt daher auch Kongruenzflächen, für die ξ_1 und ξ_2 beliebig vorgegebene von 0 verschiedene Werte haben; sie hängen von 2 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

Im zuletzt behandelten Fall lassen sich daher auch die Werte von φ und ψ beliebig vorschreiben. Wir zeigen:

Zu jedem Wertepaar φ, ψ, für das die Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ alle verschieden ausfallen, und nur zu solchen Paaren, gehören Kongruenzflächen mit nichtentartetem M-System. Sie hängen von 2 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

ξ_1 und ξ_2 sind nämlich genau dann endlich und $\neq 0$, wenn φ und ψ keine Vielfachen von $\pi/2$, also m und $\bar{m}$, n und $\bar{n}$ verschieden sind. Entartungen treten stets dann ein, wenn $\xi_1=\xi_2$, also

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\operatorname{tg}\psi.$$

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\psi=\pm\varphi+N\pi$, also wenn m mit n oder mit $\bar{n}$ zusammenfällt.

Wählt man φ und ψ beliebig, so besteht im allgemeinen keine Beziehung (159), die Punkte des M-Diagrammes stellen dann lauter verschiedene Flächen dar[27]).

Nach (157) ist

$$q=\xi_1\xi_2=\frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2 2\psi}. \tag{160}$$

$q=1$ führt daher auf

$$\psi=\pm\varphi+N\frac{\pi}{2}:$$

Kennzeichnend für die Kongruenzflächen unserer Klasse mit $q=1$ ist, daß die Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen.

[27]) Zwei nichtentartete Flächen verschiedener Klassen des M-Systems sind stets verschieden. Eine gemeinsame Fläche zweier Systeme müßte nämlich erzeugt werden von einem Schnittpunkt einer Hauptnormalen von $\mathfrak{x}$ mit einer Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN. Da durch einen solchen Schnittpunkt zwei Geraden von K gehen würden, müßte er auf einer Leitgeraden von K liegen und die fragliche Fläche wäre entartet.

Da die Vorzeichen unwesentlich sind, können wir etwa

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

annehmen. Dann ist $k=0$, $l=2$ eine Lösung von (159). Zum Vektor $(-4, 4)$ gehört also die identische Projektivität. Zu $(-2, 2)$ gehört die Drehung des Komplexbildes um π, also im R_3 die Spiegelung an den Leitgeraden von K.

Einen besonders einfachen Fall haben wir, wenn $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\psi = -\frac{\pi}{6}$. Die Lösungen von (159) sind dann die ganzzahligen Linearkombinationen von $k=0$, $l=2$ und $k=3$, $l=1$. Jede Klasse des M-Systems besteht aus 6 verschiedenen Flächen, auch unter den im M-Diagramm dargestellten linearen Komplexen gibt es 6 verschiedene. Kennzeichnend für diese Flächen sind die Bedingungen $p=10/3$, $q=1$; denn es ist $\xi_1=\frac{1}{3}$, $\xi_2=3$.

§ 8. Die Gegenfläche.

Wenden wir uns jetzt wieder den Kongruenzflächen zu, bei denen die GODEAUX-Kette geschlossen ist. Hat diese $4n$ Glieder, so stellen bekanntlich[28]) die $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ gegenüberliegenden Flächen $\mathfrak{u}_{2n-1}$ und $\mathfrak{u}_{2n}$ ebenfalls die Schmiegtangenten einer Fläche des R_3 dar, die wir die Gegenfläche der vorgegebenen nennen. Wir zeigen zunächst:

Die Gegenfläche gehört einem der 4 in § 4 betrachteten Systeme von Schichtflächen an, zu denen auch sämtliche Flächen des M-Systems von $\mathfrak{x}$ gehören. Ist n gerade, so gehört sie zu einer der beiden Flächenscharen, deren Flächen zu $\mathfrak{x}$ projektiv oder korrelativ sind, ist n ungerade, so zu einer der beiden anderen Scharen; sie ist dann projektiv zu einer M-Transformierten von $\mathfrak{x}$.

Deuten wir nämlich die zur Gegenfläche gehörigen Größen und Vektoren durch ein darübergesetztes $\hat{}$ an, so ist

$$\hat{\mathfrak{u}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n}, \qquad \hat{\mathfrak{v}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n-1}, \qquad \hat{\mathfrak{a}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n+1}, \qquad \hat{\mathfrak{b}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n-2}.$$

Ist also n gerade, so liegt in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\mathfrak{a}}$ der Punkt $\mathfrak{e}$, in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\mathfrak{b}}$ der Punkt $\mathfrak{f}$. Wie in (115) ergibt sich hieraus, daß von den Schnittpunkten $\mathfrak{e}+\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}-\mathfrak{f}$ von $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ mit Q einer eine Gerade in der Tangentenebene der Gegenfläche, der andere eine Gerade durch den Flächenpunkt $\hat{\mathfrak{x}}$ dieser Fläche darstellt. Die Gegenfläche ist also in diesem Fall Schichtfläche der beiden Hauptnormalenkongruenzen von $\mathfrak{x}$.

Ist n ungerade, so liegt $\mathfrak{d}$ in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{c}$ in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\mathfrak{b}}$; man sieht dann genau so, daß die Gegenfläche Schichtfläche der von den Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{x}$ erzeugten Kongruenzen ist.

Es liegt auf der Hand, zu fragen, ob die Gegenfläche im M-System von $\mathfrak{x}$ vorkommen kann. Hierüber gilt der Satz:

Wenn die Gegenfläche mit der vom Punkte (x, y) des M-Diagrammes dargestellten Fläche des M-Systems identisch ist, so ist der Vektor $(2x, 2y)$ Periodenvektor dieses Systems.

[28]) Vgl. etwa G, p. 18.

Da nämlich die Gegenfläche von der Wahl der Vorzeichen von H und K unabhängig ist, wird sie auch durch den Punkt $(-x, -y)$ des M-Diagrammes dargestellt, dieser und (x, y) stellen daher die gleiche Fläche dar.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: Ist die GODEAUX-Kette einer Kongruenzfläche geschlossen und hat ihr M-System Perioden, so braucht die Gegenfläche dem M-System nicht anzugehören. Beispiele werden sich im folgenden ergeben.

Für die weitere Untersuchung sind Fallunterscheidungen nötig, und zwar nach verschiedenen Gesichtspunkten:

a) Hyperbolisch oder elliptisch gekrümmte Flächen,

b) Zugehörigkeit zur Klasse A oder B nach § 2,

c) n gerade oder ungerade.

Wir verzichten auf eine erschöpfende Darstellung und bringen nur einige allgemeine Sätze.

Jeder Fläche mit geschlossener GODEAUX-*Kette der Klasse B, deren Gegenfläche dem M-System angehört, entsprechen 2 Winkel φ und ψ, zwischen denen eine Beziehung der Form*

$$k\varphi + l\psi + m\pi = 0 \tag{161}$$

mit ganz rationalen k, l, m besteht und für die die Größen

$$\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi} = \xi_1, \qquad \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi} = \xi_2 \tag{162}$$

von 1 verschiedene n-te Einheitswurzeln sind.

Das folgt sofort aus dem oben hervorgehobenen Satz. Die Umkehrung gilt daher nicht.

Offenbar handelt es sich bei der Auffindung solcher Winkelpaare im Grunde um einen Satz der algebraischen Zahlentheorie. Aus (162) folgt nämlich

$$\sin^2\varphi = \frac{\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}, \qquad \sin^2\psi = \frac{1-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}, \tag{163}$$

die Winkelfunktionen von φ und ψ sind daher algebraische Zahlen. Es dürfte wohl nicht leicht sein, sämtliche Lösungen anzugeben.

Hat das M-System einer Kongruenzfläche 2 linear unabhängige Perioden, so ist die GODEAUX-*Kette nicht geschlossen.*

Es gibt dann nämlich 2 linear unabhängige Beziehungen (161), daraus folgt aber, daß φ und ψ reell sind. ξ_1 und ξ_2 können dann keine von 1 verschiedenen Einheitswurzeln sein.

Beschränken wir uns auf hyperbolisch gekrümmte Flächen vom Typus B, so können wir nach S. 133

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

setzen. Für $k+l \neq 0$ würde dann aus (161) folgen, daß φ und ψ reell wären, im Widerspruch zu (162). Das M-System hat also nur $(-4, 4)$ und Vielfache dieses Vektors als Perioden; der erstgenannte Vektor ist ja nach § 7 für $q=1$ stets Periodenvektor.

Als Bildpunkt der Gegenfläche im M-Diagramm kommt daher nur $(-2, 2)$ in Frage; die Gegenfläche kann daher bei hyperbolisch gekrümmten Flächen vom Typus B nur dann im M-System vorkommen, wenn sie aus der Fläche selbst durch Spiegelung an den Leitgeraden der Kongruenz K hervorgeht. Denn die Fläche des M-Systems mit dem Bildpunkt $(-2, 2)$ hat in unserem Fall nach § 7 diese Eigenschaft.

Nach dem ersten Satz dieses Paragraphen muß dazu n gerade sein. Aber auch die Umkehrung gilt:

Die Gegenfläche einer hyperbolisch gekrümmten Fläche mit geschlossener GODEAUX*-Kette vom Typus B gehört dann und nur dann dem M-System an, wenn n gerade, also die Periode $4n$ der* GODEAUX*-Kette durch 8 teilbar ist. Sie wird im M-Diagramm durch den Punkt $(-2, 2)$ dargestellt, wenn H und K so normiert sind, daß $(-4, 4)$ eine Periode des M-Systems ist.*

Ist nämlich n gerade, so ist nach § 2, da ξ_1 und ξ_2 konjugiert komplexe n-te Einheitswurzeln sind, die nicht schon zum Exponenten $n/2$ gehören,

$$\pi_g^{n/2} = -E.$$

Die Abbildung $\pi^{n/2}$ führt daher $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in sich über, während jeder Vektor, der einen Punkt von g darstellt, ein Minuszeichen erhält. Im Geradenraum handelt es sich also um eine Spiegelung an g und dem Raum durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$. Im R_3 entspricht dieser Abbildung aber, wie man leicht nachprüft, die Spiegelung an den Leitgeraden von K. Diese führt daher die Schmiegtangenten beider Gegenflächen und daher auch die Gegenflächen selbst ineinander über.

Die gleichen Sätze gelten offenbar für elliptisch gekrümmte Flächen vom Typus B, bei denen ξ_1 und ξ_2 konjugiert komplex sind. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch den Satz:

Ist die GODEAUX*-Kette einer elliptisch gekrümmten Fläche vom Typus B geschlossen und n gerade, so ist die Gegenfläche stets dann zur Fläche selbst projektiv gleichwertig und entsteht aus ihr durch Spiegelung an den Leitgeraden von K, wenn weder ξ_1 noch ξ_2 eine zum Exponenten $n/2$ gehörige Einheitswurzel ist. Ist jedoch etwa $\xi_1^{n/2} = 1$, so entsprechen sich beide Gegenflächen beim Nullsystem eines linearen Komplexes, dem die Kongruenz K angehört; der Bildpunkt dieses Komplexes im R_5 ist der zur Wurzel ξ_2 gehörige Fixpunkt der Projektivität π_g.*

Den ersten Teil der Behauptung beweist man wie den vorangehenden Satz. Zum Nachweis des zweiten Teiles seien $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ die zu ξ_1 und ξ_2 gehörigen Fixpunkte von π_g; diese Punkte liegen nach § 9, 2. konjugiert in bezug auf die absolute Quadrik Q des Geradenraumes. Es ist dann

$$\pi_g^{n/2}\,\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1, \qquad \pi_g^{n/2}\,\mathfrak{t}_2 = -\mathfrak{t}_2$$

und daher bleiben $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ bei $\pi^{n/2}$ fest, während der zur Hyperebene durch diese Punkte polare Punkt $\mathfrak{t}_2$ in $-\mathfrak{t}_2$ übergeht. $\pi^{n/2}$ ist also die Spiegelung an $\mathfrak{t}_2$ und dieser Hyperebene, diese stellt aber im R_3 das Nullsystem des von beiden dargestellten linearen Komplexes dar. Daraus folgt die Behauptung.

Übersichtlicher sind die Verhältnisse bei den Flächen vom Typus A:

Bei jeder Fläche mit geschlossener GODEAUX-*Kette der Periode* $4n$ *vom Typus A gehört die Gegenfläche dem M-System an; normiert man H und K so, daß* ϑ_{31} *und* ϑ_{32} *entarten, so wird sie durch den Punkt* (n, n) *des M-Diagrammes dargestellt. Ist n gerade, so entstehen beide Gegenflächen auseinander durch Spiegelung an den Leitgeraden der Kongruenz K.*

Nach § 5 sind bei unseren Flächen bei der gewählten Normierung die Bedingungen

$$A = HK, \qquad Hb = Ka \tag{164}$$

kennzeichnend, in(128) gilt das Pluszeichen. Die charakteristische Gl. (76) hat daher die doppelte Wurzel

$$\xi = \frac{Kd}{Hc}. \tag{165}$$

Ist n gerade, so sind sowohl $\pi^{n/2}$ wie die Projektivität, die ξ auf die Fläche (n, n) abbildet, involutorisch und lassen jede Gerade von K fest. Daher sind beide Projektivitäten mit der Spiegelung an den Leitgeraden von K identisch und unser Satz ist bewiesen.

Etwas komplizierter ist der Nachweis für ungerades n. Geben wir die zur i-ten M-Transformierten gehörenden Größen durch den angehängten eingeklammerten Index i an, so ist nach § 3

$$\mathfrak{c}_{(0)} = -\varepsilon_{(0)} P H^{-1} \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{d}_{(0)} = -\varepsilon_{(0)} Q K^{-1} \mathfrak{e},$$

$$\mathfrak{e}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} H^{-1} \mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{f}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} K^{-1} \mathfrak{c}.$$

Bei unseren Flächen ist weiter

$$\mathfrak{m}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} \cdot \frac{PQ}{LM\varrho_{(0)}} Kd \cdot \mathfrak{m}, \qquad \bar{\mathfrak{m}}_{(0)} = \frac{\varepsilon_{(0)}}{4} \frac{PQ}{LM} \mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{n}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(0)}} Hc\,\mathfrak{n}, \qquad \bar{\mathfrak{n}}_{(0)} = \frac{\varepsilon_{(0)}}{4} \frac{PQ}{LM} \mathfrak{m}.$$

Analoge Formeln gelten für ϑ_{33}; um sie zu erhalten, kann man in den obigen H durch $-H$, K durch $-K$, $\mathfrak{m}$ durch $\bar{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n}$ durch $\bar{\mathfrak{n}}$ und umgekehrt ersetzen. Man findet

$$\mathfrak{c}_{(3)} = \varepsilon_{(3)} P H^{-1} \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{d}_{(3)} = \varepsilon_{(3)} Q K^{-1} \mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{e}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} H^{-1} \mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{f}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} K^{-1} \mathfrak{c}$$

$$\bar{\mathfrak{m}}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(3)}} Kd \cdot \bar{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{m}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{4} \frac{PQ}{LM} \bar{\mathfrak{n}},$$

$$\bar{\mathfrak{n}}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(3)}} Hc\,\bar{\mathfrak{n}}, \qquad \mathfrak{n}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{4} \frac{PQ}{LM} \bar{\mathfrak{m}}.$$

Beachten wir noch, daß in unserem Fall

$$\bar{\mathfrak{n}} = \frac{H - a}{d} \mathfrak{m}, \qquad \bar{\mathfrak{m}} = \frac{K - b}{c} \mathfrak{n},$$

$$\varrho_{(0)} = 2H(b - K), \qquad \varrho_{(3)} = -2H(b + K),$$

so sehen wir, daß die Projektivität, die im M-Diagramm zum Vektor $(2, 2)$ gehört, im R_5 eine projektive Abbildung bewirkt, die $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ festläßt und $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ der Reihe nach auf $\xi\,\mathfrak{m}$ und $\xi^{-1}\,\mathfrak{n}$ abbildet.

Die in § 2 betrachteten Projektivitäten π und π_0 lassen ebenfalls $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ fest, π_0 bildet $\mathfrak{n}_{-2}$ und $\mathfrak{n}_{-1}$ ab auf $\breve{\mathfrak{n}}_0$ und $\breve{\mathfrak{n}}_1$, während $\pi^{(n+1)/2}$ die gleichen Punkte abbildet auf $\mathfrak{n}_{2n}$ und $\mathfrak{n}_{2n+1}$, also auf die Punkte $\hat{\mathfrak{n}}_0$, $\hat{\mathfrak{n}}_1$ der GODEAUX-Kette der Gegenfläche. Die Projektivität

$$\pi^{n+1/2}\,\pi_0^{-1}$$

bildet also entsprechende Flächen der GODEAUX-Ketten von $\mathfrak{z}_0$ und von der Gegenfläche aufeinander ab.

Man findet

$$\pi_0\,\mathfrak{m} = \xi\,\mathfrak{m}, \qquad \pi_0\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n},$$

während

$$\pi\,\mathfrak{m} = \xi\,\mathfrak{m}, \qquad \pi\,\mathfrak{n} = \xi\,\mathfrak{n}.$$

Daher ist

$$\pi^{(n+1)/2}\,\pi_0^{-1}\,\mathfrak{m} = \xi^{(n-1)/2}\,\mathfrak{m}, \qquad \pi^{(n+1)/2}\,\pi_0^{-1}\,\mathfrak{n} = \xi^{(n+1)/2}\,\mathfrak{n}.$$

Die gleiche Wirkung hat aber die $(n-1)/2$-te Potenz der zum Vektor $(2, 2)$ des M-Diagrammes gehörigen Projektivität. Da diese $\mathfrak{z}_0$ auf die zum Punkte (n, n) des M-Diagrammes gehörige Fläche des M-Systems abbildet, folgt auch hier die Behauptung des Satzes.

Offenbar enthält das M-System in unserem Fall $2n$ verschiedene Flächen, die paarweise Gegenflächen voneinander und zu je n projektiv gleichwertig sind.

§ 9. Ergänzende Bemerkungen. Beispiele.

1. Aus (124), (78), (79) folgt

$$g^2 = L\,c^2(1 + q - p) = L\,c^2(1 - \xi_1)\,(1 - \xi_2). \tag{166}$$

Die Kongruenz K ist daher dann und nur dann parabolisch, wenn 1 eine Wurzel der charakteristischen Gl. (76) ist. Daß die Bedingung notwendig ist, wurde schon in § 2 gezeigt.

Entartet K, so ist $\pi_{\boldsymbol{g}} = E$ und (76) hat dann 2 Wurzeln 1. Letzteres kann aber auch vorkommen, wenn K nicht singulär ist, nämlich bei sämtlichen Flächen der Klassen IPb) und IIPb).

2. $\lambda\,\mathfrak{x} + \mu\,\mathfrak{y}$ ist dann und nur dann Fixpunkt von $\pi_{\boldsymbol{g}}$, wenn

$$\begin{cases} d\,(a\,A - L\,b)\,\mu^2 + 2\,(a^2\,b^2 - c^2\,d^2 - M\,a^2 - L\,b^2 + L\,M)\,\lambda\mu + \\ \qquad + c\,(b\,A - M\,a)\,\lambda^2 = 0. \end{cases} \tag{167}$$

Mit Hilfe dieser Formel und von (42) läßt sich leicht bestätigen, daß die Fixpunkte von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ die Schnittpunkte der Geraden $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{Q}$ harmonisch trennen. Im Komplexbild entsprechen ihnen die Winkelhalbierenden von $m, \overline{m}$ und $n, \overline{n}$.

3. Projiziert man die GODEAUX-Kette einer Kongruenzfläche aus $\boldsymbol{g}$ als Projektionszentrum auf einen zu $\boldsymbol{g}$ windschiefen dreidimensionalen linearen Raum $\boldsymbol{R}$, so haben $\mathfrak{u}_m$ und $\mathfrak{u}_{m+4}$ nach (60) die gleiche Projektion, es entsteht also eine geschlossene LAPLACE-Kette der Periode 4. Diese steht zu der von den Flächen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildeten Kette in einem engen Zusammenhang: Es gibt eine Korrelation, die sie überführt in die zur letztgenannten Kette dualen Kette[29]). Diese Korrelation ist die Polarenbildung an $\boldsymbol{Q}$, sie bildet jeden Punkt von $\boldsymbol{R}$ ab auf den Schnitt von $\boldsymbol{G}$ mit der zu $\boldsymbol{R}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ polaren Hyperebene.

Die GODEAUX-Kette ist nämlich bekanntlich autopolar in bezug auf $\boldsymbol{Q}$; die Hyperebene durch $\mathfrak{u}_{m-2}, \mathfrak{u}_{m-1}, \mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m+1}, \mathfrak{u}_{m+2}$ ist polar zu $\mathfrak{d}_{-m}$, also $\mathfrak{u}_{-m-1}$. Diese Hyperebene trifft $\boldsymbol{G}$ in einer zweidimensionalen Ebene, denn ihr Pol liegt nicht auf der Polaren $\boldsymbol{g}$ von $\boldsymbol{G}$. Nach (44) wird diese Ebene aufgespannt von den Punkten $\mathfrak{v}_m, \mathfrak{v}_{m+1}, \mathfrak{v}_{m+2}$ unserer LAPLACE-Kette in $\boldsymbol{G}$. Diese Ebene der dualen Kette ist also polar zu $\boldsymbol{g}$ und $\mathfrak{u}_{-m-1}$ und damit auch zur Projektion von $\mathfrak{u}_{-m-1}$, wie gezeigt werden sollte.

Den Projektionen von $\mathfrak{b}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}, \mathfrak{a}$ entsprechen bei unserer Korrelation der Reihe nach die Ebenen $(\mathfrak{e}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{e}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f})$.

Die Projektion der GODEAUX-Kette hat die gleichen DARBOUX-Invarianten wie diese. Die GODEAUX-Kette hat also die gleichen DARBOUX-Invarianten — die mit der Periode 4 wiederkehren —, wie die Kette der Flächen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ in Ebenenkoordinaten.

Bekanntlich kann man die DARBOUX-Invarianten der Flächen einer LAPLACE-Kette eindeutig den Verbindungskongruenzen aufeinanderfolgender Flächen der Kette zuordnen: Zu jeder Kongruenz gehört auf den beiden Flächen, die sie verbindet, die gleiche Invariante.

Zur Kongruenz $(\mathfrak{u}_{-n}, \mathfrak{u}_{-n-1})$ der GODEAUX-Kette gehört aber die gleiche Invariante wie zur Kongruenz $(\mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_{n-1})$ der Kette in $\boldsymbol{G}$ in Ebenenkoordinaten, insbesondere also zu den Kongruenzen

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{v}), \qquad (\mathfrak{v}, \mathfrak{u}), \qquad (\mathfrak{u}, \mathfrak{a}), \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{u}_2)$$

der GODEAUX-Kette der Reihe nach die gleichen wie zu

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{e}), \qquad (\mathfrak{d}, \mathfrak{f}), \qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}).$$

Diese Invarianten haben in dieser Reihenfolge die Werte

$$2P, \quad \beta\gamma, \quad 2Q, \quad 4cd. \tag{168}$$

Wie man leicht nachprüft, gehört bei einer beliebigen geschlossenen LAPLACE-Kette der Periode 4 zu jeder Kongruenz in Ebenenkoordinaten die gleiche Invariante wie zur gegenüberliegenden in Punktkoordinaten. Die

[29]) Zum Begriff der dualen Kette vgl. man etwa PD I, § 32. Sie wird gebildet von den zweiparametrigen Ebenensystemen, die entstehen, wenn man je drei entsprechende Punkte von aufeinanderfolgenden Flächen der vorgegebenen Kette durch eine Ebene verbindet. Spannt diese einen n-dimensionalen Raum auf, so sind entsprechend n aufeinanderfolgende Glieder durch Hyperebenen zu verbinden.

Invarianten (168) gehören also in Punktkoordinaten der Reihe nach zu den Kongruenzen

$$(\mathfrak{d}, \mathfrak{f}), \qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}), \qquad (\mathfrak{e}, \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{e})$$

der Kette in $\boldsymbol{G}$.

4. Für die isotherm-asymptotischen unter den Kongruenzflächen gilt außer den Bedingungen aus § 1 die Regel

(169) $$P = Q.$$

Nach (29) führt das auf

(170) $$\beta_1 = 3\,b\,\beta^2\,d^{-1}, \qquad \gamma_2 = 3\,a\,\gamma^2\,c^{-1}.$$

Bei isotherm-asymptotischen Flächen kann man u und v so normieren, daß $\beta = \gamma$; u und v sind dann bis auf Transformationen

(171) $$u = c_1\,u^* + c_2, \qquad v = c_1\,v^* + c_3$$

mit konstanten c_i festgelegt. Bei elliptisch gekrümmten Flächen ist dabei c_1 reell, c_2 und c_3 sind konjugiert komplex, außerdem sind hier noch Umnormungen

(172) $$u = \varepsilon\,u^*, \qquad v = \varepsilon^2\,v^*$$

möglich, wobei ε eine dritte Einheitswurzel ist.

Die Gln. (25), (28), (31), (35), (170) mit den Nebenbedingungen (29), (169) bilden jetzt ein vollständiges System, die Lösungen hängen von 6 Konstanten ab. Da die Flächen unserer Klasse im allgemeinen keine Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten, hängen sie von 3 Konstanten ab.

Die M-Transformierten einer isotherm-asymptotischen Kongruenzfläche sind nach (104) ebenfalls isotherm-asymptotisch.

5. Die Flächen, für die $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ist, pflegt man Koinzidenzflächen zu nennen, weil für sie die von Wilczynski, Green, Fubini u. a. angegebenen „Projektivnormalen" alle miteinander identisch sind. Aus (10), (8), (12), (28) folgt für sie weiter

(173) $$\sigma = \tau = 0, \qquad P = Q = \tfrac{1}{2}\beta\gamma, \qquad a = b = 0.$$

Normiert man u und v wieder so, daß $\beta = \gamma$, so wird diese Größe eine Konstante, und man kann die Parameter noch so einrichten, daß $\beta = \gamma = 2$. Dann sind nur noch Transformationen (171) mit $c_1 = 1$ möglich. Die halbinvariante Differentiation ist jetzt die gewöhnliche.

Für die Kongruenzflächen unter den Koinzidenzflächen ist nach (29), (31), (35)

(174) $$\beta\,c + 2L = 0, \qquad \gamma\,d + 2M = 0, \qquad P = Q = 2\,c\,d$$

und weiter

(175) $$L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0.$$

Alle Invarianten der Fläche sind konstant; sie läßt daher eine zweigliedrige, Abelsche Gruppe von Projektivitäten in sich zu, die durch

(176) $$u = \hat{u} + k_1, \qquad v = \hat{v} + k_2$$

mit konstanten k_1, k_2 beschrieben werden kann, und ist eine W-Fläche im Sinne von KLEIN und LIE.

Bei der obigen Normierung ist

$$\beta = \gamma = 2, \qquad P = Q = 2, \qquad c\,d = 1, \qquad L = -c, \qquad M = -d. \tag{177}$$

Unsere Fläche ist dann eine Lösung der Gleichungen

$$\mathfrak{x}_{uu} = 2\mathfrak{x}_v + L\,\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = 2\mathfrak{x}_u + M\,\mathfrak{x}. \tag{178}$$

Unsere Flächen gehören sämtlich der Klasse c) an. Sind $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ die nichtentarteten M-Transformierten, so ist nach (133)

$$H\,K = -c\,d = -1.$$

Für $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ gilt also nach (99), (100), (104), (105)

$$\breve{\beta} = \gamma = 2, \qquad \breve{P} = \breve{Q} = 2, \qquad \breve{L} = L, \qquad \breve{M} = M.$$

Diese Flächen genügen daher ebenfalls den Gln. (178), sie sind mit der Fläche $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig. Dabei entsprechen sich Punkte, die zu den gleichen Werten der Parameter gehören.

Nach (44), (52) ist für unsere Flächen $h_m = 0$. Sämtliche zu geraden m e'ı örigen Punkte $\mathfrak{u}_m$ der GODEAUX-Kette liegen also mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ in einer Ebene, sämtliche mit ungeradem m ebenso mit $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$.

Die GODEAUX-Kette unserer Flächen gestattet eine Projektivität des R_5 in sich, die jede Fläche auf die nächstfolgende abbildet. Die Ableitungsgleichungen für die Vektoren

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}, \mathfrak{v}$$

sind nämlich die gleichen wie die für

$$\gamma\,\mathfrak{d}, \quad 2P\,\mathfrak{f}, \quad \mathfrak{c}, \quad 2c\,\mathfrak{e}, \quad P\,\mathfrak{v}, \quad \gamma\,\mathfrak{u}.$$

Das Bild von $\boldsymbol{Q}$ bei dieser Projektivität ist eine von $\boldsymbol{Q}$ verschiedene Quadrik $\boldsymbol{Q}_1$; da $\mathfrak{v}$ auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, enthält diese das Bild $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{v}$. Sämtliche Schmiegtangenten $\mathfrak{u}$ der Fläche gehören daher dem von $\boldsymbol{Q}_1$ dargestellten quadratischen Strahlenkomplex an, ebenso liegen die Schmiegtangenten der anderen Schar in einem quadratischen Komplex.

Der Ansatz

$$x_k = e^{m_k u + n_k v}; \qquad k = 0, 1, 2, 3 \text{ [30]} \tag{179}$$

für die Komponenten von $\mathfrak{x}$ führt auf die Bedingungen

$$m_k^2 = 2n_k + L, \qquad n_k^2 = 2m_k + M;$$

sie lassen sich befriedigen durch

$$m_k = \alpha_k^2 + \alpha_k^{-1}\sqrt{2}, \qquad n_k = \alpha_k^{-2} + \alpha_k\sqrt{2}, \tag{180}$$

[30]) Vgl. FUBINI-ČECH: Geometria Proiettiva Differenziale I, § 27. Bologna 1927.

wobei α_k eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^4 = L \tag{181}$$

darstellt. Verwendet man für die 4 Koordinaten die 4 Wurzeln von (181), so gibt also (179) eine Parameterdarstellung unserer Fläche in einem geeignet gewählten projektiven Koordinatensystem, sofern die zugehörigen Werte von m_k und n_k nicht für 2 Wurzeln die gleichen sind.

Letzteres tritt dann und nur dann ein, wenn

$$L^3 = -1.$$

Durch eine Umnormung (172) kann man dann erreichen, daß

$$L = M = -1 \tag{182}$$

wird. Die zugehörigen Flächen haben die Parameterdarstellung

$$x_0 = e^{u+v},\quad x_1 = 2(u+v)e^{u+v},\quad x_2 = e^{-(u+v)-2i(u-v)},\quad x_3 = e^{-(u+v)+2i(u-v)}. \tag{183}$$

Führt man die inhomogenen Koordinaten

$$x = \frac{x_2}{x_0},\qquad y = \frac{x_3}{x_0},\qquad z = -\frac{x_1}{x_0}$$

ein, so erhält man für sie die Gleichung

$$x\,y = e^{2z}. \tag{184}$$

Durch die Ersetzung

$$x \to x + i\,y,\qquad y \to x - i\,y, \tag{185}$$

der eine komplexe Projektivität entspricht, wird daraus

$$x^2 + y^2 = e^{2z}. \tag{186}$$

Die Fläche (184) ist elliptisch, die Fläche (186) hyperbolisch gekrümmt. Faßt man x, y, z als Cartesische Koordinaten auf, so ist (186) die Fläche, die durch Rotation der Exponentialkurve um die Asymptote entsteht. Sämtliche reellen Flächen unseres Ausnahmefalles sind zu (184) oder (186) reell projektiv gleichwertig. Diese Flächen sind die einzigen unserer Klasse, bei denen die Kongruenz K parabolisch ist; sie ist sogar singulär. Also geht eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN durch einen festen Punkt, die andere liegt in einer festen Ebene.

Wenn der Ausnahmefall nicht vorliegt, so können wir die Konstanten ν_k bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig so bestimmen, daß

$$\sum_0^3 \nu_k = 0,\qquad \sum_0^3 \nu_k m_k = 0,\qquad \sum_0^3 \nu_k n_k = 0. \tag{187}$$

Die Fläche hat dann die in den x_k homogene Gleichung

$$x_0^{\nu_0}\, x_1^{\nu_1}\, x_2^{\nu_2}\, x_3^{\nu_3} = 1, \tag{188}$$

sie ist eine spezielle Tetraedralfläche.

Setzt man

$$\alpha_0 = \alpha, \qquad \alpha_1 = i\alpha, \qquad \alpha_2 = -\alpha, \qquad \alpha_3 = -i\alpha, \tag{189}$$

so findet man

$$\begin{cases} \nu_0 = \alpha^3 + \alpha^{-3} - \sqrt{2}, & \nu_1 = i(\alpha^3 - \alpha^{-3}) + \sqrt{2}, \\ \nu_2 = -\alpha^3 - \alpha^{-3} - \sqrt{2}, & \nu_3 = -i(\alpha^3 - \alpha^{-3}) + \sqrt{2}. \end{cases} \tag{190}$$

Ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so sind L und M konjugiert komplex. Da $LM = 1$, ist $|L| = 1$ und wir können

$$\alpha = e^{i\Theta}$$

setzen. Die ν_k sind dann proportional zu

$$\cos 3\Theta - \cos\frac{\pi}{4}, \quad -\sin 3\Theta + \sin\frac{\pi}{4}, \quad -\cos 3\Theta - \cos\frac{\pi}{4}, \quad \sin 3\Theta + \sin\frac{\pi}{4}$$

und daher zu

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad 1, \quad -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Setzen wir

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = y, \qquad x_2 = z, \qquad x_3 = x; \tag{191}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right) = C, \tag{192}$$

so erhalten wir für unsere Fläche die Gleichung

$$z = x^C y^{\frac{1-C}{1+C}}. \tag{193}$$

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt und gehört sie zur Klasse II, ist also $L > 0$, so können wir α reell und positiv wählen. Setzen wir

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = r e^{-i\varphi}, \qquad x_2 = z, \qquad x_3 = r e^{i\varphi}, \tag{194}$$

$$\alpha^3 = e^C, \tag{195}$$

so erhalten wir für unsere Fläche eine Gleichung von der Form

$$z^{2\,Ch\,C+\sqrt{2}} = r^{2\sqrt{2}}\, e^{4\,Sh\,C\cdot\varphi}. \tag{196}$$

r, φ und z können hier als Zylinderkoordinaten einer Euklidischen Metrik aufgefaßt werden.

Für die Flächen von unserem Typus der Klasse III läßt sich anscheinend keine so einfache reelle Darstellung angeben. Klasse IV kann nicht vorkommen.

Die Flächen der hier betrachteten Art, deren GODEAUX-Kette geschlossen ist, gehören zum Typus A aus § 2. Man findet für sie

$$\xi_1 = \xi_2 = c^{-3} = -L^{-3} = -\alpha^{-12}$$

und daher, wenn

$$\xi_1 = \xi_2 = e^{i\omega}$$

gesetzt wird,

$$\omega = -12\Theta - \pi.$$

Bei geeigneter Wahl von α ist also

$$3\Theta + \frac{\pi}{4} = -\frac{\omega}{4}$$

und

$$C = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{8}.$$

Die GODEAUX-Kette der Fläche (193) hat also genau dann die Periode $4n$ und keine kleinere, wenn

$$C = \operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{4n}$$

mit zu n teilerfremdem ganzzahligem ν.

Wählt man $n=2$, so kann man etwa $\nu=1$ setzen. Dann ist

$$\frac{1-C}{1+C} = C$$

und wir erhalten die Gleichung

(197) $$z = (xy)^C; \qquad C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Andere Gleichungsformen für die gleiche Fläche[31]) bekommt man, wenn man $\nu=1, 3, 5$ setzt.

Durch die Substitution (185) wird aus (197) die hyperbolisch gekrümmte Rotationsfläche

(198) $$z = (x^2+y^2)^C, \qquad C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8},$$

deren GODEAUX-Kette also ebenfalls die Periode 8 hat.

Da

$$g^2 = 2 - \xi_1^3 - \xi_1^{-3} > 0,$$

ist die Kongruenz K bei allen diesen Flächen hyperbolisch.

6. Kann eine Kongruenzfläche auf eine ihrer M-Transformierten projektiv abwickelbar sein? Zwei Flächen sind bekanntlich genau dann aufeinander projektiv abwickelbar, wenn β und γ bei beiden die gleichen Funktionen der Parameter sind. $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{x}$ haben nach (99), (100) diese Eigenschaft dann und nur dann, wenn

(199) $$P = Q = -2HK.$$

Aus (105) folgt dann

$$\breve{L} = L, \qquad \breve{M} = M,$$

was bedeutet, daß beide Flächen sogar durch eine Projektivität ineinander überzuführen sind.

Aus (199) folgt durch Differentiation mittels (28), (86)

(200) $$Hb + Ka = 0.$$

[31]) Sie wurde 1952 von M. CARTON (M. CARTON, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **22**, 101—111) angegeben und war das erste Beispiel für eine Fläche mit geschlossener GODEAUX-Kette einer Periode >6.

Da $\mathfrak{z}_0$ nicht entarten soll, ist nach (125)

$$A + HK \neq 0,$$

$\mathfrak{z}_3$ entartet also ebenfalls nicht. Naturgemäß ist diese Fläche ebenfalls zu $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig, während $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, sofern sie nicht entarten, durch Korrelationen aus $\mathfrak{x}$ hervorgehen.

Aus (29), (199) folgt für unsere Flächen

$$\beta = 2HK^{-1}d, \qquad \gamma = 2KH^{-1}c. \tag{201}$$

Da $P = Q$ können wir nach Bemerkung 4 die Parameter so normieren, daß γ/β eine Konstante wird. Da Kd/Hc nach § 2 stets konstant ist, folgt aus (201), daß auch K^3/H^3 eine Konstante ist. Durch Multiplikation von u und v mit konstanten Faktoren können wir erreichen, daß

$$K = -H \tag{202}$$

wird. Bei dieser Normierung ist

$$a = b, \qquad \beta = -2d, \qquad \gamma = -2c, \qquad c = k_1 d, \qquad \gamma = k_1 \beta \tag{203}$$

mit konstantem $k_1 \neq 0$, und weiter nach (12)

$$2L = 2M = P = Q = \tfrac{1}{2}[k_1\beta^2 - (\log\beta)_{uv}]. \tag{204}$$

Da die erste Gewichtszahl von c und die zweite von d Null sind, sind c_1 und d_2 gewöhnliche Ableitungen. Aus (31), (203) folgt daher

$$\frac{\beta_u}{\beta} = \frac{c_u}{c} = -2a = -2b = \frac{d_v}{d} = \frac{\beta_v}{\beta}. \tag{205}$$

Daher ist

$$\beta(u, v) = \beta(u + v)$$

eine Funktion von $u + v$ allein und das gleiche gilt für die übrigen Invarianten.

Jede unserer Flächen gestattet daher eine eingliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich mit den Bahnkurven

$$u + v = \text{const}, \qquad du + dv = 0.$$

Wir führen die neuen Parameter

$$\lambda = u + v, \quad \mu = u - v \tag{206}$$

ein und geben Ableitung nach λ durch einen Strich an.

Da $P\gamma$ die erste Gewichtszahl 0 hat, ist

$$(P\gamma)_u = (P\gamma)_1 = 2a\,P\gamma = -P\gamma(\log\beta)_u$$

und daher

$$2P\beta^2 = k_3 = \text{const} \neq 0. \tag{207}$$

Für β folgt daraus die Differentialgleichung

$$(\log\beta)'' = k_1\beta^2 - k_3\beta^{-2}. \tag{208}$$

Durch Integration ergibt sich daraus

$$\beta'^2 = k_1\beta^4 + k_2\beta^2 + k_3 \tag{209}$$

mit konstanten k_i und $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$.

Offenbar führt (209) auf elliptische Funktionen; man verwendet am einfachsten die von Jacobi. Bei geeigneter Vorzeichenverteilung der k_i kann man setzen

$$\beta(\lambda) = c_1 \operatorname{sn}\frac{\lambda}{c_2}. \tag{210}$$

Die konstanten Lösungen von (209) führen auf die in Bemerkung 5 betrachteten Koinzidenzflächen, brauchen also hier nicht noch einmal berücksichtigt zu werden.

Da λ noch mit einem konstanten Faktor multipliziert werden kann, sind von den Konstanten in (209) nur 2 wesentlich. Unsere Flächen hängen daher von 2 Konstanten ab.

Setzt man

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}\,|\beta|,$$

so genügt der Vektor $\bar{\mathfrak{x}}$ den Bedingungen

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = -(\log\beta)'\,\bar{\mathfrak{x}}_u + \beta\,\bar{\mathfrak{x}}_v + \frac{1}{4}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_{vv} = k_1\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_u - (\log\beta)'\,\bar{\mathfrak{x}}_v + \frac{1}{4}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}} \end{cases} \tag{211}$$

oder umgeschrieben auf λ, μ:

$$\begin{cases} 4\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\mu} = (1-k_1)\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_\lambda - [(1+k_1)\beta + 2(\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\mu, \\ 2(\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda} + \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu}) = [(1+k_1)\beta - 2(\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\lambda + (k_1-1)\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_\mu + \frac{1}{2}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{cases} \tag{212}$$

Für die zur Klasseneinteilung wichtigen Invarianten findet man

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4}(k_2 + k_3\beta^{-2}), \qquad q = k_1^{-2}, \qquad p = k_1^{-2}k_3^{-1}(2k_1k_3 - k_2^2), \\ p^2 - 4q = k_1^{-4}k_3^{-2}k_2^2(k_2^2 - 4k_1k_3), \\ g^2 = \frac{1}{16}[k_2^2 + k_3(1-k_1)^2]. \end{cases} \tag{213}$$

Die Fläche gehört also genau dann zum Typus c), wenn $k_2 = 0$; zum Typus b), aber nicht zu c), wenn

$$k_2^2 - 4k_1k_3 = 0. \tag{214}$$

In diesem Fall kann man (209) mit einfach periodischen Funktionen integrieren.

Die Kongruenz K ist singulär, wenn $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Unter unseren Flächen kommen solche aus 18 der in § 6 aufgezählten 24 Klassen vor; ausgenommen sind nur die zu IV), IIE) und IIP) gehörigen.

Aus dem Ansatz (210) ergeben sich für c_1, c_2 und den Modul k^2 der elliptischen Funktion die Beziehungen

$$k_1 = k^2c_1^{-2}c_2^{-2}, \qquad k_2 = -c_2^{-2}(1+k^2), \qquad k_3 = c_1^2c_2^{-2}. \tag{215}$$

Für c_1 ergibt sich daraus die Bedingung

$$k_1 c_1^4 + k_2 c_1^2 + k_3 = 0 \tag{216}$$

und für

$$k^2 = k_1 k_3^{-1} c_1^4$$

die Gleichung

$$k_1 k_3 (k^4 + 1) + (2 k_1 k_3 - k_2^2) k^2 = 0. \tag{217}$$

Setzt man

$$\xi = - k_1^{-1} k^2,$$

so geht (217) in die charakteristische Gl. (76) über. Wir können daher etwa

$$k^2 = - k_1 \xi_1 \tag{218}$$

setzen. Lassen wir auch elliptische Funktionen zu, bei denen k^2 negativ oder komplex ist, so ist unser Ansatz in allen Fällen brauchbar; für $k^2 = 1$ entarten allerdings unsere Funktionen in einfach periodische.

Da

$$\xi_1 \xi_2 = q = k_1^{-2}, \tag{219}$$

ist

$$k^4 = \xi_1 \xi_2^{-1}.$$

Wir können daher den Modul k^2 in Beziehung setzen zum Komplexbild des § 7: Nach (157) ist

$$k^2 = \pm \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi}. \tag{220}$$

Die Nullstellen des Polynoms auf der rechten Seite von (209) haben also das gleiche Doppelverhältnis wie die Bildpunktpaare der Komplexe $\mathfrak{m}$, $\overline{\mathfrak{m}}$; $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$ mit den Doppelelementen der Involution, der sie angehören.

Die GODEAUX-Kette unserer Fläche ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode $4n$, wenn k_1^2 und $-k^2 k_1^{-1}$ beide n-te Einheitswurzeln sind. Aus (215) folgt

$$(k + k^{-1})^2 = k_2^2 k_1^{-1} k_3^{-1}. \tag{221}$$

Setzen wir daher

$$k_1 = - e^{i\Theta}, \quad k_2^2 k_1^{-1} k_3^{-1} = 4 \cos^2 \chi, \tag{222}$$

so ist die GODEAUX-Kette dann und nur dann geschlossen und hat die Periode $4n$, wenn 2Θ und $2\chi - \Theta$ reell und ganzzahlige Vielfache von $2\pi/n$ sind und χ kein Vielfaches von π ist. Im letztgenannten Fall gehört die Fläche zur Klasse b) und hat keine geschlossene GODEAUX-Kette.

Umgekehrt kann man ξ_1 und ξ_2 als n-te Einheitswurzeln beliebig wählen und findet stets eine Fläche der hier betrachteten Art, für die die Gl. (76) diese Wurzeln hat.

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt und sind ξ_1 und ξ_2 verschieden, so kann sie nach § 6 nur dann eine geschlossene GODEAUX-Kette haben, wenn $L > 0$, $M > 0$. Nach (204), (207) ist dann $k_3 > 0$ und wegen (222) auch $k_1 > 0$.

Nach § 2 ist $q = 1$ und es folgt $k_1 = 1$. Wie wir gleich zeigen, sind diese Flächen daher spezielle PETERSONsche Flächen.

Eine interessante Sonderklasse bilden diejenigen unserer Flächen, bei denen die Bahnkurven der Gruppe DARBOUX-Kurven sind, also der Gleichung

$$\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0$$

genügen. Dazu ist offenbar

$$k_1 = 1$$

notwendig und hinreichend. Die Gln. (212) vereinfachen sich dann zu

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\xi}_{\lambda\mu} &= -\tfrac{1}{2}\,[\beta + (\log\beta)']\,\bar{\xi}_\mu \\ \bar{\xi}_{\lambda\lambda} + \bar{\xi}_{\mu\mu} &= [\beta - (\log\beta)']\,\bar{\xi}_\lambda + \tfrac{1}{4}\,k_3\,\beta^{-2}\,\bar{\xi}. \end{aligned}\right. \tag{223}$$

Setzt man

$$\bar{\xi} = \varphi\,\hat{\xi}$$

mit

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{2}\,(\beta + (\log\beta)'), \tag{224}$$

so wird

$$\hat{\xi}_{\lambda\mu} = 0, \qquad \hat{\xi}_{\lambda\lambda} + \hat{\xi}_{\mu\mu} = 2\beta\,\hat{\xi}_\lambda + \tfrac{1}{4}\,k_2\,\hat{\xi}. \tag{225}$$

Die erste Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\hat{\xi} = \mathfrak{a}(\lambda) + \mathfrak{b}(\mu), \tag{226}$$

aus der zweiten folgt, daß

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}'' - 2\beta\,\mathfrak{a}' - \tfrac{1}{4}\,k_2\,\mathfrak{a} &= \mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}'' - \tfrac{1}{4}\,k_2\,\mathfrak{b} &= -\mathfrak{c} \end{aligned}\right. \tag{227}$$

mit festem $\mathfrak{c}$.

(226) besagt, daß unsere Flächen einer von PETERSON hervorgehobenen Klasse angehören[32]; die Bahnkurven der Gruppe und die dazu konjugierte Schar bilden ein Netz mit der Eigenschaft, daß die Tangentenebenen der Fläche längs jeder Netzkurve einen Kegel berühren. Aus (227) folgt aber, daß die Netzkurven eben sind, unsere Flächen sind daher im Sinne von W. Süss Projektivrotationsflächen.

Die Kurven $\mathfrak{a}'(\lambda)$ und $\mathfrak{b}'(\mu)$, die von den zu jeder Netzschar gehörigen Kegelspitzen beschrieben werden, sind Geraden, wie das bei einer gewöhnlichen Rotationsfläche für das Netz der Meridiankurven und Parallelkreise der Fall ist.

Diese Geraden schneiden sich in dem vom Vektor $\mathfrak{c}$ dargestellten Punkte, wenn $k_2 = 0$[33]. Ist $k_2 \neq 0$, so können wir durch Änderung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ um einen gemeinsamen konstanten Vektor erreichen, daß $\mathfrak{c} = 0$ wird. Der Punkt $\mathfrak{a}$ liegt dann stets auf der von $\mathfrak{a}'$ beschriebenen Geraden, $\mathfrak{b}$ auf der von $\mathfrak{b}'$ beschriebenen. Diese Geraden sind jetzt windschief, da sonst unsere Fläche eine Ebene wäre. Wir können das Koordinatensystem so wählen, daß die

[32] PETERSON, K.: Über Curven und Flächen. Moskau u. Leipzig 1868.

[33] Wenn $k_2 = 0$, so ist $\mathfrak{c} \neq 0$, da sonst $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ feste Punkte wären, was nicht angeht.

erste die Gleichungen $x_1 = x_2 = 0$, die zweite die Gleichungen $x_0 = x_3 = 0$ hat. Wir erhalten dann für unsere Fläche eine Parameterdarstellung von der Form

$$x_0 = a_0(\lambda), \qquad x_1 = b_1(\mu), \qquad x_2 = b_2(\mu), \qquad x_3 = a_3(\lambda). \tag{228}$$

Ist $k_2 < 0$ und fassen wir

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0}, \qquad z = \frac{x_3}{x_0}$$

als Cartesische Koordinaten auf, so ist die Fläche eine Rotationsfläche, die Meridiankurve hat die Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{a_0(\lambda)}, \qquad z = \frac{a_3(\lambda)}{a_0(\lambda)}. \tag{229}$$

Ist $k_2 = 0$, so ist $\mathfrak{c} \neq 0$, da sonst $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ feste Punkte wären, was offenbar nicht möglich ist. Die von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ durchlaufenen Geraden treffen sich im Punkte $\mathfrak{c}$. (225) hat hier die Lösung $x_0 = 1$; wählt man die Ebene $x_0 = 0$ als uneigentliche, so ist die Fläche eine Translationsfläche. Eine Leitkurve ist eine Parabel, die andere eben.

7. Wenn die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ gebildete Kette eine Projektivität des dreidimensionalen Raumes $\boldsymbol{G}$ in sich gestattet, die jede Fläche in die gegenüberliegende überführt, so haben gegenüberliegende Kongruenzen dieser Kette die gleiche DARBOUX-Invariante.

Eine Geradenkongruenz eines R_3 hat in der von ihr erzeugten LAPLACE-Kette dann und nur dann in Punkt- und in Ebenenkoordinaten die gleiche DARBOUX-Invariante, wenn sie eine W-Kongruenz ist. Nach Bemerkung 3 und 4 sind also die isotherm-asymptotischen unter den Kongruenzflächen dadurch ausgezeichnet, daß die Geraden $(\mathfrak{c}, \mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{d}, \mathfrak{f})$ im Raume $\boldsymbol{G}$ W-Strahlensysteme erzeugen. Ebenso haben $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ dann und nur dann diese Eigenschaft, wenn

$$\beta\gamma = 4cd. \tag{230}$$

Nach Bemerkung 3 sind die isotherm-asymptotischen unter unseren Flächen auch dadurch gekennzeichnet, daß bei Projektion des R_5 aus $\boldsymbol{g}$ auf einen zu $\boldsymbol{g}$ windschiefen R_3 aus den Kongruenzen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{u}, \mathfrak{a})$ der GODEAUX-Kette W-Strahlensysteme entstehen. Gilt das für eine von beiden Kongruenzen, so auch für die andere.

Ebenso bedeutet (230), daß die Projektion von $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ eine W-Kongruenz ist.

Sind sämtliche Kongruenzen der von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildeten Kette W-Strahlensysteme, so gilt das gleiche für die Projektion der GODEAUX-Kette. In diesem Fall ist

$$P = Q, \quad \beta\gamma = 4cd. \tag{231}$$

Mittels (29) folgt daraus

$$PQ = 4LM,$$

und bei geeigneter Vorzeichenwahl von H und K kann man auf (199) schließen. Das bedeutet aber, daß eine der M-Transformierten unserer Fläche zu dieser

selbst projektiv gleichwertig ist. Nach § 2 gestattet dann die Godeaux-Kette eine Projektivität des R_5, bei der jede Fläche $\mathfrak{u}_m$ in $\mathfrak{u}_{m+2}$ übergeht.

Entsprechendes gilt dann für ihre Projektion und damit auch für die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildete Kette. Aus der eingangs gemachten Bemerkung folgt, daß auch die Umkehrung gilt.

Gestattet die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildete Kette eine Projektivität, die jede Fläche in die nächstfolgende überführt, so ist

$$2P = 2Q = \beta\gamma = 4cd.$$

Die Fläche gehört also zum in Bemerkung 6 behandelten Typus, und nach (207) ist β konstant, sie ist also eine Koinzidenzfläche.

8. Wenn die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildete Kette durch eine Korrelation von $\boldsymbol{G}$ in sich selbst übergeführt wird, so ändert sich dabei ihr Umlaufsinn. Da jetzt die Invariante in Punktkoordinaten jeder Kongruenz der Invariante der Bildkongruenz in Ebenenkoordinaten gleich ist, ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$\alpha)$ $\qquad P = Q$

$\beta)$ $\qquad \beta\gamma = 4cd$

$\gamma)$ $\qquad \beta\gamma = 2P, \qquad 4cd = 2Q$

$\delta)$ $\qquad \beta\gamma = 2Q, \qquad 4cd = 2P.$

Zwischen $\gamma)$ und $\delta)$ besteht natürlich kein wesentlicher Unterschied. In jedem Fall ist unsere Kette zur Projektion der Godeaux-Kette aus $\boldsymbol{g}$ projektiv gleichwertig. Die aufgezählten Bedingungen stellen sich auch als hinreichend heraus.

Die Flächen, für die $\beta)$ gilt, hängen wie die isotherm-asymptotischen $\alpha)$ von 3 Konstanten ab, diejenigen, für die $\gamma)$ oder $\delta)$ gilt, von 2 Konstanten.

Wenn eine Kongruenzfläche zu einem dieser 4 besonderen Typen gehört, so gehört jede ihrer M-Transformierten zum gleichen Typus.

9. Je 2 Kanten $(\mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m-1})$ und $(\mathfrak{v}_{-m}, \mathfrak{v}_{-m-1})$ der Godeaux-Kette einer beliebigen Fläche schneiden bekanntlich $\boldsymbol{Q}$ in 4 Punkten, die im R_3 die 4 Kanten eines Vierseits V_m darstellen. V_1 ist das Vierseit von Demoulin. Jedes Vierseit V_m erzeugt in Abhängigkeit von u und v eine T-Figur im Sinne von R. Calapso und S. Finikoff[34]). Ist m ungerade, so hat diese bei Kongruenzflächen die Charakteristik -1.

Das hängt damit zusammen, daß 2 Quadriken Q und Q_1, die ein Vierseit V enthalten, mit den beiden im Büschel

$$\lambda Q + \mu Q_1 = 0$$

enthaltenen Ebenenpaaren dann und nur dann das Doppelverhältnis -1 haben, wenn je 2 Geradenscharen auf Q und Q_1, denen nicht die gleichen

[34]) Calapso, R.: Rec. math. Moscou **42**, 451—460, 461—464 (1935). Vgl. auch S. Finikoff, C. r. Acad. Sci. Paris **202**, 548—549 (1936).

Kanten von V angehören, in einem linearen Komplex liegen; hat ein Paar solcher Geradenscharen diese Eigenschaft, so auch das andere.

In unserem Fall liegen die Bilder zweier solcher Geradenscharen für die Hauptquadriken der von V_m erzeugten T-Figur in den Ebenen $(\mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m+1}, \mathfrak{u}_{m+2})$ und $(\mathfrak{v}_{-m+1}, \mathfrak{v}_{-m}, \mathfrak{v}_{-m-1})$ des R_5. Ist m ungerade, so haben diese Ebenen den Punkt $\mathfrak{v}_{m+2}$ gemeinsam, und beide Geradenscharen liegen deshalb in einem linearen Komplex.

10. Wenn die Diagonalen des Vierseits von Demoulin einer Fläche einem linearen Komplex angehören, so muß zunächst wieder $N = 0$ sein. Die Gerade $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ liegt nicht an jeder Flächenstelle ganz in der Bildhyperebene des Komplexes; ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + \alpha \mathfrak{v}$$

ihr Schnittpunkt mit der Bildhyperebene, so sind die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ Linearkombinationen dieser Vektoren selbst. Daraus erhält man für α die Bedingungen:

$$\begin{cases} d_1 - \beta b + 2a d = \alpha(Q - b_1 - 2c d) \\ P - a_2 - 2c d = \alpha(c_2 - \gamma a + 2b c) \end{cases} \tag{232}$$

$$\alpha_1 = -\beta - 2\alpha a - 2\alpha^2 c, \qquad \alpha_2 = 2d + 2b\alpha + \gamma\alpha^2. \tag{233}$$

Die Integrierbarkeitsbedingung (8) für α ist erfüllt. Setzt man

$$\begin{cases} c_2 = \gamma a - 2b c + h, & a_2 = P - 2c d - \alpha h \\ d_1 = \beta b - 2a d + k, & b_1 = Q - 2c d - \alpha^{-1} k, \end{cases} \tag{234}$$

so folgen durch Kombination mit (30) die weiteren Bedingungen

$$h_1 = 2h(\alpha c - 1) - 2c\alpha^{-1} k, \qquad k_2 = 2k(\alpha^{-1} d - 1) - 2d\alpha h. \tag{235}$$

Das so entstandene System von Differentialgleichungen ist vollständig, die Lösungen hängen von 6 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab, die fraglichen Flächen also von 4 solchen Funktionen.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. März 1953.)

Minagawa, T., and T. Rado
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 151—163 (1953)

On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution.*)

By
T. Minagawa and T. Rado.

§1. Introduction.

1.1. In Euclidean three-space, let $\mathfrak{x}$ be the position vector of a surface S (that is, $\mathfrak{x}$ is the vector from the origin of the coordinate system $x\,y\,z$ to a generic point of the surface). A vector function $\mathfrak{z}$ on S induces an infinitesimal deformation of S if and only if

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z}=0 \text{ on } S. \tag{1}$$

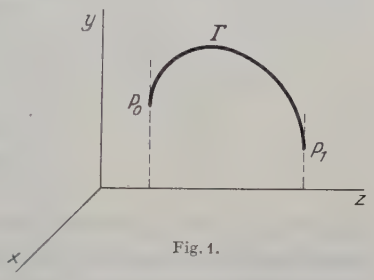

Fig. 1.

For basic information and literature on the subject of infinitesimal deformations, the reader may consult Darboux [2], Efimov [3]. If $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ are constant vectors, then clearly $\mathfrak{z}=(\mathfrak{a}\times\mathfrak{x})+\mathfrak{b}$ is a solution of (1). The corresponding infinitesimal deformation reduces then to an infinitesimal rigid motion, and is termed *trivial*. A surface S is said to possess the property of *infinitesimal rigidity* (property IR for brevity) if it admits only of trivial infinitesimal deformations.

The meaning of the property IR depends upon the class $\mathfrak{R}$ of deformation vectors $\mathfrak{z}$ [satisfying (1)] that are considered as admissible. We shall use the symbol IR_n to refer to the IR property if $\mathfrak{R}$ is taken as the class of all solutions of class C^n of (1). Similarly, the symbol IR_a will be used if $\mathfrak{R}$ is the class of all analytic solutions of (1).

1.2. One purpose of this note is to call attention to a generalization of a remarkable theorem of Liebmann [5] on the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. To state the theorem of Liebmann in a concise form, let us introduce the concept of a *strong convex belt* as follows (see Fig. 1). In the $y\,z$ plane, let there be given an arc Γ with the following properties. (i) Except perhaps for its end points P_0, P_1, the arc Γ is located in the half-plane $y>0$. (ii) Γ is convex from above. (iii) Except perhaps for the end points P_0, P_1, the curvature of Γ is different from zero. (iv) At P_0 and P_1 the tangent to Γ is parallel to the y-axis.

The smoothness requirements upon Γ will be specified later on. If Γ is rotated around the z-axis, one obtains a surface of revolution which will be

*) This paper was prepared while the first-named author worked at the Ohio State University under a research grant from the Office of Ordnance Research, U.S. Army, and the second-named author acted as superviser.

termed a *strong convex belt*. The theorem of LIEBMANN [5] may then be stated as follows: *If a surface of revolution S contains a strong convex belt Σ, then S is infinitesimally rigid.* The proof of LIEBMANN [5] runs as follows. Let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector on S, satisfying (1). LIEBMANN shows that on Σ the vector $\mathfrak{z}$ reduces to the trivial form $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$. From this he infers, without further explanation, that this same relation holds on all of S. This inference is clearly valid if one assumes that S and $\mathfrak{z}$ are *both analytic* (an assumption which was quite natural at the time when LIEBMANN studied the problem on hand). Thus, in the terminology introduced in 1.1, LIEBMANN actually proved that *an analytic surface of revolution S which contains a strong convex belt possesses the IR_a property*. In this note, we show that the assumption of analyticity can be dropped in this statement. Our results imply essentially that *a surface of revolution of class C', which contains a strong convex belt of class C'', possesses the IR_1 property* (in the sense explained in 1.1).

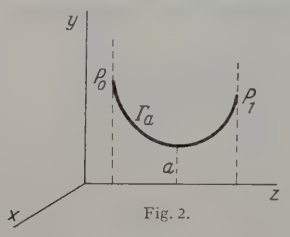

Fig. 2.

1.3. It is important to observe that the proof of LIEBMANN [5] for the infinitesimal rigidity of a strong convex belt itself is independent of the analyticity assumptions. In fact, inspection of his proof reveals that he actually established the following theorem: *a strong convex belt of class C'' possesses the IR_1 property*. Accordingly, we shall use this theorem in our proof. It should be observed that condition (iii) in 1.2 could be omitted. However, for the sake of brevity we omit discussion of this aspect of the situation.

1.4. Our second objective in this note is to further clarify an interesting situation studied by REMBS [6]. In the $y\,z$ plane, let there be given an arc Γ_a with the following properties (see Fig. 2). (i) In terms of its arc length u (measured from the end point P_0), Γ_a can be represented in the form $y = a + \varrho(u)$, $z = \zeta(u)$, $0 \leq u \leq U < +\infty$, where $a > 0$ is a constant, $\varrho(u) \geq 0$ for $0 \leq u \leq U$, $\zeta'(u) > 0$ for $0 < u < U$. (ii) Γ_a is convex from below. (iii) At the end points P_0, P_1, the tangent of Γ_a is parallel to the y-axis. — The smoothness assumptions about Γ_a will be specified below. On rotating Γ_a around the z-axis, one obtains a surface of revolution S_a, depending upon the parameter $a > 0$, which we shall call an R-surface (*Rembs surface*). A value of $a > 0$ will be termed a *weak value* if the corresponding surface S_a does *not* possess the IR_1 property (see 1.1). Otherwise, $a > 0$ will be termed a *strong value* [observe: the functions $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are fixed]. REMBS [6] proved that there *exist infinitely many weak values*. Inspection of his proof reveals that one can readily verify the fact that the set of weak values is denumerable. In other words: *except for a denumerable set of a-values, the surface S_a possesses the IR_1 property*. Actually, REMBS [6] assumes that (1) the functions $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are analytic, (2) the curvature of Γ_a is different from zero everywhere, (3) at the end points P_0 and P_1, the contact between Γ_a and its tangent is of the first order. We show in this note that the denumerability of the *weak values* a can be established if one assumes only that (1*) $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are of class C'' for $0 \leq u \leq U$,

(2*) the curvature is permitted to vanish arbitrarily; in particular, Γ_u may contain straight segments (but it must be convex from below), and (3*) no assumption is made about the order of contact at P_0, P_1.

Inspection of our proof reveals that condition (1*) could be replaced by the following one: $\varrho'(u)$, $\zeta'(u)$ exist and are absolutely continuous for $0 \leq u \leq U$. The reader conversant with the theory of Real Variables will easily check this point.

1.5. This note is concerned with infinitesimal deformations of the *first order*. For infinitesimal deformations of the *second order*, REMBS [8] obtained interesting rigidity theorems under the assumption that the given surface as well as the admissible deformations are *analytic*. In EFIMOV [3], where the surfaces studied by REMBS are termed *planar troughs*, one finds a simplified account of these results of REMBS, under the same analyticity assumptions. The methods used in the present note yield the result that for the case of surfaces of revolution the analyticity assumptions just mentioned are unnecessary in verifying infinitesimal rigidity of the second order. This remark will be discussed in detail elsewhere.

§ 2. Preliminaries.

2.1. In the $y\,z$ plane, let C be an arc with the following properties. (i) In terms of its arc length u, C can be represented in the form $y = r(u)$, $z = \zeta(u)$, $0 \leq u \leq U$, where U is the total length of C, and $r(u)$, $\zeta(u)$ are of class C' in the closed interval $0 \leq u \leq U$. (ii) $\zeta'(u) \neq 0$, $r(u) > 0$ for $0 < u < U$.

Under these conditions, C will be termed an *admissible arc*.

2.2. On rotating the admissible arc C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S with the parametric representation

$$x = r(u) \sin v, \qquad y = r(u) \cos v, \qquad z = \zeta(u),$$

where v is the angle of rotation. Now let $\mathfrak{z} = (X, Y, Z)$ be a deformation vector of class C' on S, satisfying (1). One obtains convenient differential equations for $\mathfrak{z}$ in the following manner (see LIEBMANN [5], REMBS [6]). Introduce auxiliary functions R, V by the formulas

$$R = X \sin v + Y \cos v, \qquad rV = X \cos v - Y \sin v. \tag{2}$$

The relation (1) yields then the partial differential equations

$$r' R_u + \zeta' Z_u = 0, \tag{3}$$

$$r' R_v + r^2 V_u + \zeta' Z_v = 0, \tag{4}$$

$$R + r V_v = 0. \tag{5}$$

Now observe that $R(u, v)$, $V(u, v)$, $Z(u, v)$ have the period 2π with respect to v. Accordingly, it is convenient to introduce, following LIEBMANN [5], REMBS [6], the Fourier coefficients (with respect to v) of these functions.

One sets

$$R_{n1}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u,v)\cos n v\, dv,$$

$$R_{n2}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u,v)\sin n v\, dv,$$

with analogous definitions for $V_{n1}(u)$, $V_{n2}(u)$, $Z_{n1}(u)$, $Z_{n2}(u)$. On multiplying (3), (4), (5) by $\cos n v$, $\sin n v$ respectively and integrating with respect to v from 0 to 2π one obtains the following system of ordinary differential equations (see REMBS [6]).

(6) $$R_{n1} + n r V_{n2} = 0, \qquad R_{n2} - n r V_{n1} = 0,$$

(7) $$r' R'_{n1} + \zeta' Z'_{n1} = 0, \qquad r' R'_{n2} + \zeta' Z'_{n2} = 0,$$

(8) $$n r' R_{n2} + r^2 V'_{n1} + n\zeta' Z_{n2} = 0,$$

(9) $$n r' R_{n1} - r^2 V'_{n2} + n\zeta' Z_{n1} = 0.$$

Elimination of V_{n1}, V_{n2} yields the following result. On setting

(10) $$\lambda = R_{n1}, \qquad \mu = Z_{n1},$$

one obtains the differential equations

(11) $$r'\lambda' + \zeta'\mu' = 0,$$

(12) $$r\lambda' + (n^2 - 1) r'\lambda + n^2\zeta'\mu = 0.$$

On setting

(13) $$\lambda = R_{n2}, \quad \mu = Z_{n2},$$

one obtains again precisely the equations (11), (12).

2.3. For $0 < u < U$, $-\infty < v < \infty$, clearly R, V, Z are of class C', and hence $R_{n1}(u), \ldots, Z_{n2}(u)$ are of class C' for $0 < u < U$. For $R_{n1}(u)$, $R_{n2}(u)$, $Z_{n1}(u), Z_{n2}(u)$ this is true even in the closed interval $0 \leqq u \leqq U$. On the other hand, since $r(u)$ may vanish at one or both of the end points $u = 0$, $u = U$, for $V_{n1}(u)$, $V_{n2}(u)$ these end points may represent singularities. However, $V_{n1}(u)$ and $V_{n2}(u)$ are not involved in the differential equations (11) and (12), an important feature for the following discussion.

2.4. One verifies readily that the deformation vector $\mathfrak{z}$ reduces to the trivial form $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$ if and only if the Fourier coefficients R_{ni}, V_{ni}, Z_{ni}, $i = 1, 2$, all vanish identically for $n > 1$ (see LIEBMANN [5]). Inspection of the preceding differential equations reveals that if $R_{n1} = 0$, $R_{n2} = 0$ for a certain $n > 1$, then for the same n the remaining Fourier coefficients V_{ni}, Z_{ni}, $i = 1, 2$, also vanish identically. Indeed, (6) yields $V_{n1} \equiv 0$, $V_{n2} = 0$, and (8) and (9) yield then $Z_{n1} \equiv 0$, $Z_{n2} \equiv 0$. Hence: *if $\mathfrak{z}$ is non-trivial, then for some $n > 1$ the system* (11), (12) *must have a solution where $\lambda \not\equiv 0$.*

§ 3. Lemmas.

3.1. Given an admissible arc C in the yz plane (see 2.1), denote by P the end point of C that corresponds to $u=0$.

Definition 1. P is termed a *strong end point of the first kind for* C if $\zeta'(0) \neq 0$, $r(0) > 0$.

Definition 2. P is termed a *strong end point of the second kind for* C if the following conditions hold. (i) $r(0) > 0$. (ii) $\zeta'(0) = 0$. (iii) There exists a U^*, such that $0 < U^* < U$ and $|\zeta'(u)|$ is a non-decreasing function in the interval $0 \leq u \leq U^*$ (essentially, this means that the corresponding sub-arc of C is convex).

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S. Denote by K the boundary circle of S described by the end point P of C. Let ζ be a deformation vector of class C' on S which satisfies (1) and *vanishes on* K.

Lemma 1. If P is a strong end point (of the first or second kind) for C, then $\zeta \equiv 0$ on S.

For clarity, we subdivide the proof into several steps.

3.2. Assume first that P is of the first kind (see 3.1). For fixed n, consider the equations (10), (11), (12). Since $\zeta = 0$ on K, we have clearly

$$\lambda(0) = 0, \qquad \mu(0) = 0. \tag{14}$$

Now observe that by assumption we have now $\zeta'(u) \neq 0$, $r(u) > 0$ for $0 \leq u < U$. Hence, on solving (11), (12) for λ' and μ', we obtain a system of the form

$$\lambda' = A_{11}(u)\,\lambda + A_{12}(u)\,\mu,$$
$$\mu' = A_{21}(u)\,\lambda + A_{22}(u)\,\mu,$$

where the coefficients $A_{ij}(u)$ are continuous for $0 \leq u < U$. Since λ, μ are of class C' in this range, by a classical uniqueness theorem (see for example BIEBERBACH [1]) the relations (14) imply that $\lambda = 0$, $\mu = 0$ for $0 \leq u < U$, and by continuity also for $0 \leq u \leq U$. Hence $R_{n1}(u) \equiv 0$, $Z_{n1}(u) = 0$. Precisely the same argument [using (13), (11), (12)] yields that $R_{n2}(u) \equiv 0$, $Z_{n2}(u) = 0$. From (8) it follows then that $V'_{n1}(u) = 0$, and since clearly $V_{n1}(0) = 0$, we have $V_{n1}(u) \equiv 0$, and similarly $V_{n2}(u) \equiv 0$. The vanishing of all these Fourier coefficients implies that $R \equiv 0$, $V \equiv 0$, $Z \equiv 0$. By (2) it follows that $X = 0$, $Y \equiv 0$, and hence $\zeta \equiv 0$, as asserted.

3.3. Assume now that P is of the second kind (see 3.1). For *fixed* n, consider again the equations (10), (11), (12). Denote by I^* the interval

$$I^*: 0 \leq u \leq U^*,$$

where U^* has the same meaning as in 3.1, Definition 2. On solving, for $0 < u \leq U^*$, the system (11), (12) for λ', μ', we obtain a system of the form

$$\lambda' = A_{11}(u)\,\lambda + A_{12}(u)\,\zeta'\mu, \tag{15}$$

$$\mu' = \frac{A_{21}(u)}{\zeta'}\,\lambda + A_{22}(u)\,\mu, \tag{16}$$

where the coefficients $A_{ij}(u)$ are continuous in the closed interval I^*. Accordingly, we have a finite constant A such that

$$|A_{ij}(u)| < A, \qquad 0 \leq u \leq U^*. \tag{17}$$

Since $\zeta = 0$ on K, we have again

$$\lambda(0) = 0, \qquad \mu(0) = 0. \tag{18}$$

Recall also that λ, μ are of class C' in the closed interval I^*.

3.4. Since now $\zeta'(0) = 0$, the coefficient of λ in (16) is unbounded in the vicinity of $u = 0$ (except in the case $n = 1$). Accordingly, in proving that $\lambda = 0$, $\mu \equiv 0$ in the present case also, some degree of caution is required. Indeed, for a *general* system of first-order, linear, homogeneous differential equations with unbounded coefficients the uniqueness theorem need not hold. Example: the system

$$\lambda' = (3u^2 + u)\mu, \qquad \mu' = u^{-2}\mu,$$

has the solution

$$\lambda = u^3 e^{-\frac{1}{u}}, \qquad \mu = e^{-\frac{1}{u}}.$$

Clearly, in this case, λ and μ vanish at $u = 0$, but do not vanish identically. However, in the situation considered in 3.3 the relations $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ will follow by means of the special features that are present.

3.5. Returning to 3.3, observe that

$$r'(u)^2 + \zeta'(u)^2 = 1,$$

since u is the arc length of C. Since $\zeta'(0) = 0$, by continuity we have therefore a u^*, such that $0 < u^* < U^*$ and

$$|r'(u)| > \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{19}$$

Also, since μ is of class C' for $0 \leq u \leq U$ and $\mu(0) = 0$, we have a constant C_1 such that

$$|\mu(u)| \leq C_1 u, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{20}$$

Since μ' is bounded, we obtain from (19), (20), (11) an estimate of the form

$$|\lambda'(u)| \leq C_2 |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u^*, \tag{21}$$

where C_2 is again a constant. Since $\lambda(0) = 0$, and since $|\zeta'|$ is a non-decreasing function for $0 \leq u \leq U^*$, we obtain by integrating (21) from 0 to any $u \leq u^*$, the estimate

$$|\lambda(u)| \leq C_2 \int_0^u |\zeta'(t)|\, dt \leq C_2 u\, |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{22}$$

Now choose u_0 so that [see (17)]

$$0 < u_0 < u^*, \qquad u_0 < \frac{1}{4A}. \tag{23}$$

By (22) we have then

$$|\lambda(u)| \leq C_2 u_0 |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u_0. \tag{24}$$

Accordingly, the numbers Λ, M defined by

$$\Lambda = \text{l.u.b.} \frac{|\lambda(u)|}{|\zeta'(u)|}, \qquad 0 < u \leq u_0, \tag{25}$$

$$M = \text{l.u.b.} |\mu(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u_0 \tag{26}$$

are *finite*. We now write (15) in the form

$$\lambda' = A_{11}\zeta' \frac{\lambda}{\zeta'} + A_{12}\zeta'\mu.$$

By (17), (25), (26) there follows the estimate

$$|\lambda'| \leq A(\Lambda + M)|\zeta'|, \qquad 0 < u \leq u_0.$$

Since $\lambda(0) = 0$, integration from 0 to any $u \leq u_0$ yields the estimate

$$|\lambda(u)| \leq A(\Lambda + M) \int_0^u |\zeta'(t)|\, dt.$$

Since $|\zeta'|$ is a non-decreasing function in the range of integration, it follows that

$$|\lambda(u)| \leq A(\Lambda + M)|\zeta'(u)|\, u, \qquad 0 < u \leq u_0,$$

and hence, in view of (23),

$$\left|\frac{\lambda(u)}{\zeta'(u)}\right| \leq A(\Lambda + M)\, u \leq A u_0 (\Lambda + M) \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M),$$

for $0 < u \leq u_0$. By (25) we conclude that

$$\Lambda \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M). \tag{27}$$

On writing (16) in the form

$$\mu' = A_{21}\frac{\lambda}{\zeta'} + A_{22}\mu,$$

a similar argument yields

$$M \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M). \tag{28}$$

From (27), (28) we obtain, by addition,

$$\Lambda + M \leq \tfrac{1}{2}(\Lambda + M),$$

and since $\Lambda \geq 0$, $M \geq 0$, it follows that $\Lambda = 0$, $M = 0$. By (25), (26) we infer that

$$\lambda \equiv 0, \qquad \mu \equiv 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq u_0. \tag{29}$$

Now consider the system (15), (16) for $u_0 \leq u < U$. In this range, $\zeta' \neq 0$, and hence the coefficients of λ, μ are continuous. Also, $\lambda(u_0) = 0$, $\mu(u_0) = 0$ by (29). Accordingly, by the classical uniqueness theorem (already used in 3.2) we conclude that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq U$. Hence, by (29), $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ for the whole interval $0 \leq u \leq U$. The rest of the proof, from this point on, is the same as in 3.2.

3.6. We note the following immediate extension of the Lemma 1. In the $y\,z$ plane, let C be an arc with the following properties. (i) In terms of its arc length u, C can be represented in the form $y=r(u)$, $z=\zeta(u)$, $0\leqq u<+\infty$, where $r(u)$, $\zeta(u)$ are of class C' over this whole range (thus the total length of C is now infinite). (ii) $r(u)>0$, $0\leqq u<+\infty$. (iii) $\zeta'(u)\neq 0$, $0\leqq u<+\infty$.

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S, with a boundary circle K corresponding to the end point $u=0$. Let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector of class C' on S that satisfies (1) and vanishes on K.

Lemma 2. $\mathfrak{z}\equiv 0$ on S.

Proof. Choose an arbitrary $u_0>0$, and denote by S_0 the portion of S corresponding to $0\leqq u\leqq u_0$. Then S_0, $\mathfrak{z}$ present the situation considered in 3.2, and hence $\mathfrak{z}\equiv 0$ on S_0 by the result derived there. Since $u_0>0$ was arbitrary, it follows that $\mathfrak{z}\equiv 0$ on all of S.

3.7. We shall now comment on the system (11), (12) for the case of the arc Γ_a described in 1.4 (see Fig. 2), assuming that

$$n>1. \tag{30}$$

We have now $r(u)=a+\varrho(u)$, where $a>0$ is a constant. Accordingly, the system (11), (12) appears in the form

$$\varrho'\lambda'+\zeta'\mu'=0, \tag{31}$$

$$(a+\varrho)\lambda'+(n^2-1)\varrho'\lambda+n^2\zeta'\mu=0. \tag{32}$$

As noted in 2.3, λ and μ are of class C' for $0\leqq u\leqq U$, and by assumption

$$a>0, \qquad \varrho(u)\geqq 0, \qquad \zeta'(0)=\zeta'(U)=0. \tag{33}$$

Since $\varrho'(u)^2+\zeta'(u)^2=1$, and since Γ_a is convex from below, it follows that

$$\varrho'(0)=-1, \quad \varrho'(U)=+1. \tag{34}$$

Also, since Γ_a is convex from below, $\zeta'(u)$ is a non-decreasing function in the vicinity of $u=0$, and a non-increasing function in the vicinity of $u=U$. By (31), (34) we have

$$\lambda'(0)=0, \qquad \lambda'(U)=0. \tag{35}$$

From (32) we see that

$$\lambda(0)=0, \qquad \lambda(U)=0. \tag{36}$$

We recall that (see 1.4)

$$\zeta'(u)>0 \quad \text{for} \quad 0<u<U. \tag{36*}$$

From (31), (34) we infer that

$$\frac{\lambda'(u)}{\zeta'(u)}\to\mu'(0) \qquad \text{for} \quad u\to 0, \tag{37}$$

$$\frac{\lambda'(u)}{\zeta'(u)}\to-\mu'(U) \quad \text{for} \quad u\to U. \tag{38}$$

3.8. A pair (n, a), where $n > 1$ is an integer and $a > 0$, will be termed *exceptional* for the system (31), (32) if the system admits of a solution λ, μ such that $\lambda \not\equiv 0$. Assume now that (n, a) is exceptional and let λ, μ be a solution where $\lambda \not\equiv 0$. We assert that

$$\mu'(0) \neq 0, \quad \mu'(U) \neq 0. \tag{39}$$

The proof is the same in both cases, and so we indicate the argument only for $u = 0$. Since $|\zeta'(u)|$ is a non-decreasing function in the vicinity of $u = 0$, the argument used in 3.4 applies in showing first that $|\lambda(u)| \leq C_2\, u\,|\zeta'(u)|$ in the vicinity of $u = 0$, and hence

$$\frac{\lambda(u)}{\zeta'(u)} \to 0 \quad \text{for} \quad u \to 0. \tag{40}$$

Assume now that $\mu'(0) = 0$. On dividing in (32) by ζ' and making $u \to 0$, we obtain then by (37) and (40) the conclusion that $\mu(0) = 0$. But then we have $\lambda(0) = 0$, $\mu(0) = 0$, and thus the system (31), (32) presents the situation discussed in 3.3, 3.5. Accordingly, it would follow that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, while by assumption $\lambda \not\equiv 0$. Thus (39) is proved.

3.9. *Lemma 3.* The set of exceptional pairs (n, a), in the sense of 3.8, is denumerable.

Proof. Let (n, a) be an exceptional pair, and let λ, μ be a solution of (31), (32), of class C' in $0 \leq u \leq U$, such that $\lambda \not\equiv 0$. Since $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are by assumption (see 1.4) of class C'' in $0 \leq u \leq U$, we infer from (32) that λ'' exists and is continuous in $0 \leq u \leq U$. Thus, for $0 < u < U$, we can solve [in view of (36)] for μ in (32), and differentiate. Substitution of the resulting expression for μ' in (31) yields the differential equation

$$\left(\frac{\lambda'}{\zeta'}\right)' + \frac{(n^2 - 1)\,P}{a + \varrho}\,\lambda = 0, \qquad 0 < u < U, \tag{41}$$

where we have set

$$P = \frac{\varrho''\zeta' - \varrho'\zeta''}{(\zeta')^2}, \qquad 0 < u < U. \tag{42}$$

We observe that since Γ_a is convex from below, we have

$$P \geq 0. \tag{43}$$

The differential equation (41) is in the standard form assumed in the Sturm theory (see, for example, Hoheisel [7]). Actually, the proof of lemma 3, from this point on, is merely an application of the fundamental Sturm oscillation theorem, except that in view of the weak assumptions upon $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ we have to verify the validity of the oscillation theorem in the present situation. Hence, we proceed with some caution in the rest of the argument. We first verify that λ has only a finite number of zeros in $0 \leq u \leq U$. Indeed, zeros of λ cannot converge to $u = 0$, because this would imply the existence of a sequence of zeros of λ' converging to $u = 0$, implying by (37) that $\mu'(0) = 0$, in contradiction with (39). Similarly, one sees that zeros of λ cannot converge to $u = U$. On the other hand, if zeros of λ would converge to an interior

point u_0, where $0 < u_0 < U$, then one would have $\lambda(u_0) = 0$, $\lambda'(u_0) = 0$, and by the standard uniqueness theorem on equations of the form (41) it would follow that $\lambda \equiv 0$, a contradiction. Thus λ has a finite number $N(n, a, \lambda) \geqq 2$ of zeros [recall that $\lambda(0) = 0$, $\lambda(U) = 0$].

The number $N(n, a, \lambda)$ depends actually only upon n and a. Indeed, let λ_1, λ_2 be any two non-trivial solutions of (41), satisfying the boundary conditions (35), (36), (37), (38). Substituting λ_1, λ_2 in (41) the resulting equations yield the relation

$$\left(\frac{\lambda_1'}{\zeta'}\lambda_2 - \frac{\lambda_2'}{\zeta'}\lambda_1\right)' = 0,$$

and hence

$$\left(\frac{\lambda_1'}{\zeta'}\lambda_2 - \frac{\lambda_2'}{\zeta'}\lambda_1\right) = c, \qquad 0 < u < U,$$

where c is a constant. For $u \to 0$, the left-hand side converges to zero, in view of the boundary conditions [see (37) in particular]. Hence $c = 0$, and thus $\lambda_1'\lambda_2 - \lambda_2'\lambda_1 \equiv 0$. Accordingly, λ_1 and λ_2 are linearly dependent, and thus clearly they have the same number of zeros.

Accordingly, we can write $N(n, a)$ instead of $N(n, a, \lambda)$. Clearly, lemma 3 will be proved if we can establish the following assertion: for given integers $n > 1$, $k \geqq 2$ there exists at most one $a > 0$ such that the pair (n, a) is exceptional and $N(n, a) = k$. To verify this, assume that we have two exceptional pairs (n, a), (n, A), with corresponding non-trivial solutions λ, μ and Λ, M respectively, such that

$$N(n, a) = N(n, A) = k. \tag{44}$$

Without loss of generality, we can assume that $A > a$. We have then the equation (41) and also

$$\left(\frac{\Lambda'}{\zeta'}\right)' + \frac{(n^2 - 1)P}{A + \varrho}\Lambda = 0. \tag{45}$$

On multiplying (41) by Λ, (45) by $-\lambda$, and adding, we obtain the *Sturm identity*

$$\left(\frac{\lambda'}{\zeta'}\Lambda - \frac{\Lambda'}{\zeta'}\lambda\right)' + Q = 0, \tag{46}$$

where

$$Q = \frac{(n^2 - 1)(A - a)}{(a + \varrho)(A + \varrho)} P\lambda\Lambda. \tag{47}$$

Now let u_0 and $u_1 > u_0$ be two consecutive zeros of Λ. We verify: there exists at least one zero of u^* of λ such that $u_0 < u^* < u_1$. Indeed, if this is denied, then without loss of generality we can assume that $\lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$, $\Lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$.

Case 1. $0 < u_0 < u_1 < U$. On integrating (46) from u_0 to u_1, and recalling that $\Lambda(u_0) = \Lambda(u_1) = 0$, we obtain

$$-\frac{\Lambda'(u_1)}{\zeta'(u_1)}\lambda(u_1) + \frac{\Lambda'(u_0)}{\zeta'(u_0)}\lambda(u_0) + \int_{u_0}^{u_1} Q\,du = 0. \tag{48}$$

Since, by the standard uniqueness theorem, we must have $\Lambda'(u_0) \neq 0, \Lambda'(u_1) \neq 0$, and since $\Lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$, clearly $\Lambda'(u_1) < 0, \Lambda'(u_0) > 0$. Also, $\zeta'(u_0) > 0$, $\zeta'(u_1) > 0$ by (36*), and $\lambda(u_0) \geq 0$, $\lambda(u_1) \geq 0$. Thus (48) implies that the integral appearing there is ≤ 0. But clearly $Q \geq 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$ (see 43), and hence it follows that $Q = 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. Since $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ in the interior of this interval, and $n > 1$, $A > a > 0$, $\varrho \geq 0$, it follows that $P \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. But then, by (45), we see that

$$\Lambda' = c\zeta', \qquad u_0 \leq u \leq u_1, \tag{49}$$

where c is a constant. Since $\Lambda(u_0) = \Lambda(u_1) = 0$, we must have a value $\bar{u}$ such that $u_0 < \bar{u} < u_1$ and $\Lambda'(\bar{u}) = 0$. Since $\zeta'(\bar{u}) \neq 0$, it follows from (49) that $c = 0$; hence we have $\Lambda'(u) = 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. Since we have also $\Lambda(u_0) = 0$, it follows that $\Lambda(u) = 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. The standard uniqueness theorem yields then that $\Lambda \equiv 0$ in the whole interval $0 \leq u \leq U$, a contradiction.

Case 2. One or both of the relations $u_0 = 0$, $u_1 = U$ holds. Since the proof is entirely analogous in the three possible subcases, we consider only the case $0 = u_0 < u_1 < U$. In this case, we first replace u_0 by a small $\varepsilon > 0$ and make $\varepsilon \to 0$. In view of (37), applied to Λ, we have then

$$\frac{\Lambda'(\varepsilon)}{\zeta'(\varepsilon)}\,\lambda(\varepsilon) \to M'(0)\,\lambda(0) = 0.$$

The first term in (48) is ≥ 0 as in Case 1, and hence the integral must be again ≤ 0. From this point on, the argument is the same as in Case 1.

It is thus established that λ must have at least one zero between any two consecutive zeros of Λ. Since λ, Λ both vanish at $u = 0$ and $u = U$, this clearly implies that λ must have at least one more zero than Λ, in contradiction with (44), and lemma 3 is proved.

Remark. The preceding argument does *not* show the *existence* of exceptional pairs (n, a). It would be a matter of interest to extend the existence theorem of Rembs [6] to the non-analytic case.

§ 4. Applications.

4.1. The facts stated in 1.3 and in the lemmas 1 and 2 in 3.1, 3.6 respectively may be combined by means of the following observation. In the $y\,z$ plane, let C be a curve which is the union of two curves C_0, C_1 with the following properties. (i) C_0 is a simple arc of class C' with end points P_0, P. (ii) On rotating C_0 around the z-axis, one obtains a surface of revolution S_0 which possesses the IR_1 property (see 1.1). (iii) C_1 is either an admissible arc with a strong end point, of the first or second kind, at P (see 3.1), or else C_1 is a simple arc of infinite length, with P as an end point, such that the assumptions of the lemma 2 in 3.6 hold.

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S. *We assert that S has the IR_1 property.* Indeed, let ζ be a deformation vector of class C' on S, satisfying (1). Then S is the union of two surfaces of revolution

S_0, S_1 which correspond to the arcs C_0, C_1 respectively. By assumption, S_0 has the IR_1 proporty. Hence, we have

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b} \quad \text{on} \quad S_0, \tag{50}$$

where $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ are constant vectors. Set

$$\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z} - [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}] \quad \text{on} \quad S. \tag{51}$$

Then clearly $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z}^* = 0$ on S_1, and $\mathfrak{z}^*$ vanishes, in view of (50), on the boundary circle of S_1 that corresponds to the end point P. Accordingly, by lemma 1

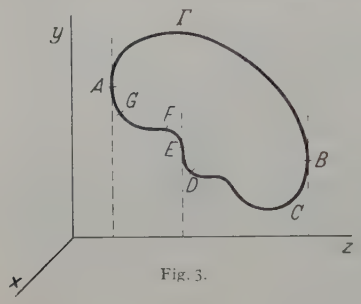

Fig. 3.

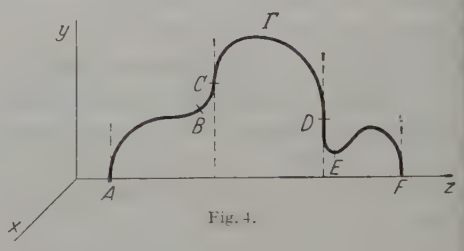

Fig. 4.

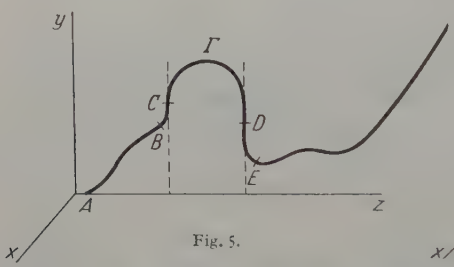

Fig. 5.

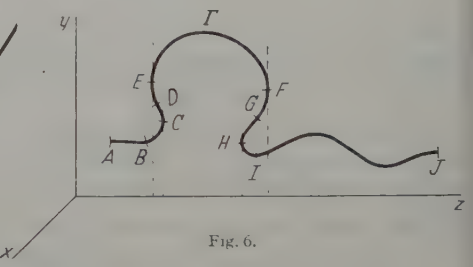

Fig. 6.

or lemma 2, $\mathfrak{z}^* = 0$ on S_1. Hence, by (51), $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$ on S_1 also, and the assertion that S has the IR_1 property is proved.

4.2. Now start with an arc $C_0 = \Gamma$, of class C'', with the properties (i)—(iv) stated in 1.2. On rotating Γ around the z-axis, one obtains a *strong convex belt* Σ with the property IR_1, according to the theorem of LIEBMANN quoted in 1.3. If we now attach, at one of the end points of $C_0 = \Gamma$, an arc C_1 so that $C = C_0 + C_1$ is of class C' and C_1 has the character required in 4.1, then on rotating C around the z-axis we obtain a surface of revolution S with the IR_1 property, by the remarks in 4.1. Repeating this process, we obtain successively surfaces of revolution of increasing diversity which possess the property IR_1.

The Figs. 3, 4, 5, 6 suggest various possibilities in constructing the meridian curve in the yz plane. The designated points in those Figures indicate the steps in the construction. Actually, inspection of the argument reveals that corners and cusps could be tolerated, in constructing the meridian, without impairing the IR_1 property of the resulting surface of revolution.

4.3. Now let us consider the surface S_a, described in 1.4, under the conditions (i), (ii), (iii), (1*), (2*), (3*) stated there. We assert that S_a has the IR_1 property, except for a denumerable set of values $a > 0$. To see this, we observe that by the remark in 2.4 the surface S_a has the IR_1 property unless the system (31), (32), which now replaces the system (11), (12), has a solution λ, μ such that $\lambda \not\equiv 0$, for some integer $n > 1$. In the terminology of 3.8, this means that (n, a) is an exceptional pair for the system (31), (32). But, by lemma 3 in 3.9, the set of exceptional pairs (n, a) is denumerable, and the assertion follows.

In the analytic case studied by REMBS [6], there actually exist *weak values* a (see 1.4) such that the corresponding surface S_a does not possess the IR_1 property, as shown by REMBS. It would be interesting to determine whether the set of *weak values* a may be *dense*, or whether this set is necessarily *isolated*.

(Added in proof). In the course of a seminar at the Ohio State University, Dr. A. D. ZIEBUR proved that the set of weak values is everywhere dense.

In view of the general remark in 4.1, it is clear that one could replace, in the situation discussed in 4.2, the arc Γ of Fig. 1 by the arc Γ_a of Fig. 2, provided that one avoids the denumerable set of weak values a.

Bibliography.

[1] BIEBERBACH: Differentialgleichungen. Berlin, Springer 1930. — [2] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, Bd. IV. — [3] EFIMOV, N. V.: Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces (Russian). Amer. Math. Soc. Translation no. 37. — [4] LIEBMANN, H.: Über die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche. Göttinger Nachr. **1901**, 39—53. — [5] LIEBMANN, H.: Über die Verbiegung von Rotationsflächen. Leipzig Ber. **53**, 215—234 (1901). — [6] REMBS, E.: Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. Math. Z. **35**, 529—535 (1932). — [7] HOHEISEL, G.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Slg. Göschen **1926**. — [8] REMBS, E.: Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen. Math. Z. **36**, 110—121 (1933).

The Ohio State University and The Tokyo Institute of Technology.

(Eingegangen am 12. April 1953.)

Nagao, H., and T. Nakayama
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 164—170 (1953)

On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules.

By
Hirosi Nagao and Tadasi Nakayama.

Let A be an algebra, of finite rank over a field, and consider a left-module $\mathfrak{m}$ of A. We call $\mathfrak{m}$ an (M_0)-module (of A), when it has the following property:

i) if a left-module $\mathfrak{M}$ of A contains an A-submodule $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ is A-isomorphic to $\mathfrak{m}$, then $\mathfrak{M}$ possesses a second A-submodule $\mathfrak{m}'$ (necessarily A-isomorphic to $\mathfrak{m}$) such that $\mathfrak{M}$ is the direct sum of $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{n}$.

On the other hand, we call $\mathfrak{m}$ an (M_u)-module, when the following holds:

ii) if a left-module $\mathfrak{M}$ of A has $\mathfrak{m}$ as its A-submodule, then $\mathfrak{M}$ possesses a second A-submodule $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{M}$ is the direct sum of $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$.

Such (M_0)- and (M_u)-modules have recently been studied, by means of certain linear mappings, by Gaschütz [3] and Ikeda [4] in the cases of group and Frobenius algebras[1]). In the present note we want to determine the structure of (M_0)- or (M_u)-modules, on assuming the existence of unit element 1 in A. We shall prove, that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if $\mathfrak{m}$ is a direct sum of (a finite or infinite number of) modules A-isomorphic to left-ideal direct components of A, and that $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module if and only if $\mathfrak{m}$ is a direct sum of modules whose duals are A-isomorphic to right-ideal direct components of A[2]).

We wish to thank M. Ikeda for his friendly collaboration during the preparation of the present note.

§1. (M_0)-modules.

Let A be an algebra (of finite rank) over a field Ω possessing unit element 1. Let

$$A=\overset{0}{\sum_{\varkappa=1}^{k}} A e_\varkappa \tag{1}$$

be a direct decomposition of A into directly indecomposable left-ideals $Ae_\varkappa$, where $\{e_\varkappa\}$ is a system of mutually orthogonal primitive idempotent elements with $\sum e_\varkappa=1$.

Lemma 1. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A[3]) be the direct sum of A-submodules $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$: $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$. $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if both $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ are (M_0)-modules.

[1]) They consider algebras over a commutative ring (which is not necessarily a field) and in that case the definition of (M_0)- and (M_u)-modules should be modified a little.

[2]) Cf. Nakayama-Nesbitt [7], p. 664 for a particular case.

[3]) Though we do not assume that the unit element 1 of A is an identity operator, we shall always assume that the unit element of the ground field Ω is an identity operator on $\mathfrak{m}$.

Proof. Assume first that $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ are (M_0)-modules. Let $\mathfrak{m}$ be A-isomorphic o a residue-module $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ (of an A-leftmodule $\mathfrak{M}$ modulo its A-submodule $\mathfrak{n}$). Let $\mathfrak{M}_i$ be, for each $i=1, 2$, the inverse image of $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$, by the (given) homomorphism of $\mathfrak{M}$ onto $\mathfrak{m}$. Clearly $\mathfrak{m}_i \cong \mathfrak{M}_i/\mathfrak{n}$. There exists, because of our assumption, an A-submodule $\mathfrak{m}_i'$ of $\mathfrak{M}_i$ with $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{m}_i' + \mathfrak{n}$. Then we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1' \oplus \mathfrak{m}_2' \oplus \mathfrak{n}$. This shows that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Assume next conversely that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module. Suppose that $\mathfrak{m}_1$ is T-isomorphic to a residue-module $\mathfrak{M}'/\mathfrak{n}$. Let then $\mathfrak{M}_0$ be the direct sum $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$. Then $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}_0/\mathfrak{n}$. So there exists an A-submodule $\mathfrak{m}'$ of $\mathfrak{M}_0$ with $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$. Naturally $\mathfrak{m}$ is canonically T-isomorphic to $\mathfrak{m}'$. Let $\mathfrak{m}_1'$ be the image in $\mathfrak{m}'$ of $\mathfrak{m}_1$ $(\subseteq \mathfrak{m})$. Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1' \oplus \mathfrak{n}$ as one easily sees. Thus $\mathfrak{m}_1$ is an (M_0)-module. We may treat $\mathfrak{m}_2$ similarly.

Lemma 2. Suppose that an A-left-module $\mathfrak{m}$ is annihilated by A: $A\mathfrak{m} = 0$. Then $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Proof. Let $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. Let $\{u_\mu\}$ be a (linearly independent) Ω-basis of $\mathfrak{m}$. Take, for each μ, an element v_μ of $\mathfrak{M}$ whose class modulo $\mathfrak{n}$ corresponds to u_μ by the isomorphism. As $1\mathfrak{m} = 0$, we have $1v_\mu \in \mathfrak{n}$. Put $v_\mu' = v_\mu - 1v_\mu$. We see readily that the module $\mathfrak{m}'$ spanned by $\{v_\mu'\}$ over Ω is an A-left-module satisfying $A\mathfrak{m}' = 0$ and $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$.

Now we prove

Theorem 1. *A left-module $\mathfrak{m}$ of the algebra A is an (M_0)-module if and only if $1\mathfrak{m}$ is the direct sum of (a finite or infinite number of) modules A-isomorphic to left-ideal direct components $Ae_\varkappa$ of A.*

Proof. By virtue of Lemmas 1, 2 we have merely to treat the case where $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$, i.e. 1 is an identity operator of $\mathfrak{m}$.

Assume first that $\mathfrak{m}$ is a direct sum $\mathfrak{m} = \sum_\mu^0 \mathfrak{m}_\mu$, where each $\mathfrak{m}_\mu$ is A-isomorphic to a left-ideal direct component of A, say $Ae_{\varkappa(\mu)}$. Let u_μ be the element of $\mathfrak{m}_\mu$ which corresponds to $e_{\varkappa(\mu)}$. Suppose, now, that $\mathfrak{m}$ is A-isomorphic to a residue-module $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ and v_μ be, for each μ, an element of $\mathfrak{M}$ whose class modulo $\mathfrak{n}$ corresponds to u_μ. Put $\mathfrak{m}' = \sum_\mu Ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu$. It is easy to see that the summation is direct and each $Ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu$ is A-isomorphic to $Ae_{\varkappa(\mu)}$ by the correspondence $ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu \leftrightarrow ae_{\varkappa(\mu)}$ $(a \in A)$ (thus A-isomorphic to $\mathfrak{m}_\mu$ by the correspondence $ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu \leftrightarrow au_\mu$). Thus $\mathfrak{m}'$ is A-isomorphic to $\mathfrak{m}$ and the isomorphism is in accord with our isomorphism of $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. Hence $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$, and $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Assume next conversely that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module (satisfying $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$). To each element u of $\mathfrak{m}$ we associate an A-left-module Ax_u possessing a single generator x_u and A-isomorphic to A by the correspondence $ax_u \leftrightarrow a$ $(a \in A)$. Let $\mathfrak{M} = \sum_{u \in \mathfrak{m}}^0 Ax_u$ be the direct sum of these modules. The mapping

$$\sum_{u \in \mathfrak{m}} a_u x_u \to \sum a_u u \quad (a_u \in A)$$

is an A-homomorphism of $\mathfrak{M}$ onto $\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{n}$ be the kernel of the homomorphism; we have $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. There exists, by virtue of our assumption, an A-submodule

$\mathfrak{m}'$ such that $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$. Let N be the radical of A. Then

$$\mathfrak{M}/N\mathfrak{M} = \mathfrak{m}'/N\mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}/N\mathfrak{n}. \tag{2}$$

On the other hand, we have $\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum}_{\varkappa, u} A e_\varkappa x_u$ and

$$\mathfrak{M}/N\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum}_{\varkappa, u} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u, \tag{3}$$

the summation being again direct. Here each component $A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u$ is A-isomorphic to $A e_\varkappa / N e_\varkappa$ $(\cong (A e_\varkappa + N)/N)$. So the A-module $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ is completely reducible. Now, let $\mathfrak{R}$ and $\overline{\mathfrak{R}}$ be the A-endomorphism rings of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ respectively. Each element φ of $\mathfrak{R}$ maps $N\mathfrak{M}$ into $N\mathfrak{M}$ and induces thus an element of $\overline{\mathfrak{R}}$. If conversely $\overline{\varphi}$ is an element of $\overline{\mathfrak{R}}$, we take, for each pair $(\varkappa, u)$, an element $v_{\varkappa, u}$ whose class modulo $N\mathfrak{M}$ is $(e_\varkappa x_u \bmod N\mathfrak{M})^{\overline{\varphi}}$. Defining $(a e_\varkappa x_u)^\varphi$ to be $a e_\varkappa v_{\varkappa, u}$, we get then an element φ of $\mathfrak{R}$ which induces, modulo $N\mathfrak{M}$, our given $\overline{\varphi}$. We get thus a (ring-) homomorphism $\varphi \to \overline{\varphi}$ of $\mathfrak{R}$ onto $\overline{\mathfrak{R}}$. Let $\mathfrak{R}_0$ be the kernel of the homomorphism. Since $\mathfrak{M}^{\mathfrak{R}_0} \subseteq N\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}_0$ is nilpotent.

As $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ is completely reducible and (3) is in fact its decomposition into irreducible (A-) modules, as was observed above, the decomposition (2) implies the existence of a regular element $\overline{\varphi}$ of $\overline{\mathfrak{R}}$ (i.e. an A-automorphism of $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$) and a set S of pairs $(\varkappa, u)$ such that

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u\right)^{\overline{\varphi}} = \mathfrak{m}'/N\mathfrak{m}',$$

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u\right)^{\overline{\varphi}} = \mathfrak{n}/N\mathfrak{n}.$$

It is easy to see from our above observation that there exists an element φ of $\mathfrak{R}$, which induces $\overline{\varphi}$, such that

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u\right)^\varphi \subseteq \mathfrak{m}',$$

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u\right)^\varphi \subseteq \mathfrak{n}.$$

As $\overline{\varphi}$ is regular in $\overline{\mathfrak{R}}$, so is φ in $\mathfrak{R}$[4]). Hence φ must map $\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u$ (A-) isomorphically onto $\mathfrak{m}'$ (and $\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u$ isomorphically onto $\mathfrak{n}$). So

$$\mathfrak{m} \cong \overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u, \qquad A e_\varkappa x_u \cong A e_\varkappa$$

and $\mathfrak{m}$ has the asserted structure. Our theorem is thus proved.

Corollary. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A be directly decomposed into a (finite or infinite) family of A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$: $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_\mu \mathfrak{m}_\mu$. $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_0)-module.

Proof. The "if" assertion follows from our theorem, while we see the "only if" part from our Lemma 1 (or from our theorem and a repetition of its proof).

[4]) Because $\mathfrak{R}_0$ is nilpotent (whence quasi-regular). In fact $\mathfrak{R}_0$ is the radical of $\mathfrak{R}$, in the sense of the term either of JACOBSON, FITTING, KÖTHE or AZUMAYA.

Remark. Theorem 1 remains valid also when A is a ring with minimum condition (and possessing unit element 1) in the following modified form: a left-module $\mathfrak{m}$ of A is an (M_0)-module if and only if $1\mathfrak{m}$ is a direct sum of modules A-isomorphic to $Ae_\varkappa$ and the largest submodule of $\mathfrak{m}$ annihilated by A is a direct sum of (again a finite on infinite number of) infinite cyclic modules (i.e. is a free abelian group). This we can see similarly as above, on observing that a module with void operator domain is an (M_0)-module, in the sense of modules with void operator domain, if and only if it is a free abelian group; the proof to the "if" part is similar to the proof of Lemma 2, while the "only if" part may readily be derived from that every abelian group, with void operator domain, is a homomorphic image of a free one, and that a subgroup of a free abelian group is a free abelian group.

§ 2. (M_u)-Modules.

Let again A be an algebra (of finite rank) over a field Ω possessing unit element 1. The system $\{e_\varkappa\}$ of primitive idempotent elements in the decomposition (1) gives rise also to a direct decomposition

$$A = \overset{0}{\sum}_{\varkappa=1}^{k} e_\varkappa A \tag{4}$$

of A into directly indecomposable right-ideals.

Lemma 3. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A be the direct sum of a family of A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$: $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_\mu \mathfrak{m}_\mu$. Then $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module if and only if every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_u)-module.

Proof. The necessity assertion is immediate. It is indeed sufficient to consider the case where $\{\mu\}$ is a two element set $\{1, 2\}$. Assume thus that $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ is an (M_u)-module. Suppose that $\mathfrak{m}_1$ is contained, as A-submodule, in an A-left-module $\mathfrak{M}$. Construct the direct sum $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$. Then $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ becomes an A-submodule of $\mathfrak{M}_0$. There must exist an A-submodule $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{M}_0$ satisfying $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$. If we denote by $\mathfrak{n}_1$ the $\mathfrak{M}$-projection of $\mathfrak{n}$ in the decomposition $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$, then we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$. This shows that $\mathfrak{m}_1$ is an (M_u)-module.

To prove the sufficiency assertion, let $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_\mu \mathfrak{m}_\mu$ and assume that every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_u)-module. Consider an A-left-module $\mathfrak{M}$ which contains $\mathfrak{m}$ as an A-submodule: $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{n}$ be a maximal one among A-submodules of $\mathfrak{M}$ intersecting with $\mathfrak{m}$ only by 0. On supposing that $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, we take an element u_0 of $\mathfrak{M}$ not belonging to $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Put

$$\mathfrak{M}_1 = A u_0 + (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}), \qquad \overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}_1/(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}).$$

We may take an Ω-submodule of $\mathfrak{M}_1$ which forms a representative system of $\mathfrak{M}$ modulo $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$; thus, if $r_{\bar{u}}$ is, for each $\bar{u} \in \mathfrak{M}$, the representative of $\bar{u}$ in the system, then

$$r_{\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}} = \alpha r_{\bar{u}} + \beta r_{\bar{v}} \qquad (\alpha, \beta \in \Omega),$$
$$a r_{\bar{u}} = r_{a\bar{u}} + v(a, \bar{u}), \qquad v(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \quad (a \in A).$$

Then $v(a, u)$ is Ω-linear with respect to a and u. Moreover we have

$$a\,v(b, \bar{u}) - v(a, b, \bar{u}) + v(a, b\,\bar{u}) = 0. \tag{5}$$

Set

$$v(a, \bar{u}) = s(a, \bar{u}) + t(a, \bar{u}) \quad \left(s(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m},\ t(a, \bar{u}) \in \mathfrak{n}\right) \tag{6}$$

and

$$s(a, \bar{u}) = \textstyle\sum_\mu s_\mu(a, \bar{u}) \qquad \left(s_\mu(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m}_\mu\right). \tag{7}$$

Then each $s_\mu(a, \bar{u})$ is Ω-linear with respect to a and $\bar{u}$, and (5) remains valid with $v(a, \bar{u})$ replaced by $s_\mu(a, \bar{u})$. As $\mathfrak{m}_\mu$ is, for each μ, an (M_u)-module, there exists[5]) an Ω-linear mapping $w_\mu(\bar{u})$ of $\overline{\mathfrak{M}}$ into $\mathfrak{m}_\mu$ such that $s_\mu(a, \bar{u}) = a\,w_\mu(\bar{u}) - w_\mu(a, \bar{u})$. Since both A and $\overline{\mathfrak{M}}$ are of finite rank over Ω, $s_\mu(a, \bar{u})$ vanishes identically on $a, \bar{u}$ for almost all μ. For such identically vanishing $s_\mu(a, \bar{u})$ we may, and shall, take $w_\mu(\bar{u})$ to be identically 0. Put then

$$w(\bar{u}) = \textstyle\sum_\mu w_\mu(\bar{u}) \quad (\in \mathfrak{m}),$$

$$r'_{\bar{u}} = r_{\bar{u}} - w(\bar{u}).$$

Then

$$a\,r'_{\bar{u}} = r'_{a\,\bar{u}} + t(a, \bar{u}).$$

Hence the sum $\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\}$ is an A-submodule of $\mathfrak{M}$. Clearly $\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\} \neq \mathfrak{n}$ and $(\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\}) \cap \mathfrak{m} = 0$. This contradicts with the maximality of $\mathfrak{n}$. Thus necessarily $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, which proves that $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module.

Lemma 4. Let a left-module $\mathfrak{M}$ of A be directly decomposed into a family of directly indecomposable A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$ possessing (A-) composition series. Then any component in a direct decomposition of $\mathfrak{M}$ into A-submodules has a direct summand A-isomorphic to some $\mathfrak{m}_\mu$.

See, for the proof, AZUMAYA [1] or BAER [2].

Now, with an Ω-module $\mathfrak{M}$, we denote by $\mathfrak{M}^*$ the dual module of $\mathfrak{M}$, i.e. the Ω-module of all Ω-linear mappings of $\mathfrak{M}$ into Ω. In case $\mathfrak{M}$ is an A-right-(resp. left-)module, the dual module $\mathfrak{M}^*$ is an A-left-(resp. right-)module, where we put, for $\lambda \in \mathfrak{M}^*$, $a \in A$ and $u \in \mathfrak{M}$,

$$(a\,\lambda)(u) = \lambda(u\,a) \qquad \left(\text{resp. } (\lambda\,a)(u) = \lambda(a\,u)\right).$$

Further, with each submodule $\mathfrak{m}$ of $\mathfrak{M}$ we may associate a submodule $\mathfrak{m}_1$ of $\mathfrak{M}^*$ consisting of all elements of $\mathfrak{M}^*$ vanishing on $\mathfrak{m}$. If $\mathfrak{M}$ is an A-left-module, say, and if $\mathfrak{m}$ is its A-(left-)submodule of finite rank over Ω, then $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{m}_1$ is A-(right-)isomorphic to the dual module $\mathfrak{m}^*$ of $\mathfrak{m}$.

Lemma 5. The dual $(e_\varkappa A)^*$ of the right-ideal $e_\varkappa A$ [in (4)] is an (M_u)-module.

Proof. Put $\mathfrak{m} = (e_\varkappa A)^*$ and let $\mathfrak{m}$ be contained, as A-submodule, in an A-left-module $\mathfrak{M}$. Denote by $\mathfrak{m}_1$ the submodule of $\mathfrak{M}^*$ associated with $\mathfrak{m}$. Then $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}^* = (e_\varkappa A)^{**} \cong e_\varkappa A$; observe that $e_\varkappa A$ is of finite rank over Ω.

[5]) See e.g. KAWADA [5].

As $e_\varkappa A$ is an (M_0)-right-module, we have $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ with an A-(right-)submodule $\mathfrak{n}_1$ of $\mathfrak{M}^*$. Let $\mathfrak{n}$ be the A-(left-)submodule of $\mathfrak{M}$ consisting of all elements u on which every element of $\mathfrak{n}_1$ vanishes. As $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, we have $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = 0$. Further, as $\mathfrak{n}_1$ is of finite rank, over Ω, we see readily that $\mathfrak{n}_1$ is the submodule of $\mathfrak{M}^*$ associated with $\mathfrak{n}$, and we have, from $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{n}_1 = 0$, that $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Thus $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, which shows that $\mathfrak{m} = (e_\varkappa A)^*$ is an (M_u)-module.

Lemma 6. If a left-module $\mathfrak{m}$ of A is annihilated by A, then $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module.

Proof. Let $\mathfrak{m}$ be contained, as A-submodule, in an A-leftmodule $\mathfrak{M}$. Set $\mathfrak{M}_1 = 1\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}_2 = \{u \in \mathfrak{M} \mid 1u = 0\}$. Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ and $\mathfrak{M}_2 \supseteq \mathfrak{m}$. As $1\mathfrak{M}_2 = 0$, clearly $\mathfrak{m}$ is a direct component of $\mathfrak{M}_2$, whence of $\mathfrak{M}$, in the sense of A-modules.

Now we have

Theorem 2. *A-left-module $\mathfrak{m}$ of the algebra A is an (M_u)-module, if and only if $1\mathfrak{m}$ is a direct sum of (a finite or infinite number of) submodules A-isomorphic to the duals $(e_\varkappa A)^*$ of the right-ideal direct components $e_\varkappa A$ of A.*

Proof. Because of Lemma 6 and the easier half of Lemma 3, it is enough to consider the case $1\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Further, the sufficiency assertion is clear from the other half of Lemma 3 and Lemma 5.

To prove the necessity of the condition, consider an A-left-module $\mathfrak{m}$ with $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{M}$ be the Ω-module of all Ω-linear mappings of A into $\mathfrak{m}$. Defining at with $a \in A$, $t \in \mathfrak{M}$ by $(a\,t)\,(b) = t(b\,a)$ $(b \in A)$, we consider $\mathfrak{M}$ as a left-module of T. Further, putting $u(a) = a\,u$ for each $u \in \mathfrak{m}$, we may consider $\mathfrak{m}$ as an A-submodule of $\mathfrak{M}$. Now, let $\{u_\mu\}$ be a (linearly independent) Ω-basis of $\mathfrak{m}$. For each $t \in \mathfrak{M}$, put

$$t(a) = \sum_\mu \tau_\mu(a)\, u_\mu \qquad (\tau_\mu(a) \in \Omega)\,.$$

With each fixed $t \in \mathfrak{M}$, almost all τ_μ vanish (identically on a) (since A is of finite rank over Ω). We see readily that the correspondence $t \to \{\tau_\mu\}$ gives an A-isomorphism of $\mathfrak{M}$ onto the direct sum of isomorphic copies, as many as the power of the set $\{\mu\}$, of the dual A^* of the A-right-module A. Hence $\mathfrak{M}$ is the direct sum of a certain number of A-submodules each of which is A-isomorphic to the dual $(e_\varkappa A)^*$ of some $e_\varkappa A$.

Assume, now, that our A-left-module $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module. Then there exists an A-submodule $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{M}$ satisfying $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Let $\{\mathfrak{m}_\nu\}$ be a maximal family of A-submodules such that each $\mathfrak{m}_\nu$ is A-isomorphic to some $(e_\varkappa A)^*$ and the sum $\overset{0}{\sum} \mathfrak{m}_\nu$ is direct; the existence of a such maximal family can readily be seen by means of ZORN's lemma. The direct sum $\overset{0}{\sum} \mathfrak{m}_\nu$ is an (M_u)-module, by Lemmas 3 and 5, and therefore, there exists an A-submodule $\mathfrak{n}_0$ of $\mathfrak{m}$ such as $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum} \mathfrak{m}_\nu \oplus \mathfrak{n}_0$. Hence $\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum} \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}$. As $\mathfrak{M}$ is, on the other hand, a direct sum of A-submodules each of which is A-isomorphic to some $(e_\varkappa A)^*$. It follows, by Lemma 4, that if $\mathfrak{n}_0 \neq 0$ then $\mathfrak{n}$ has a direct component

A-isomorphic to a certain $(e_\varkappa A)^*$, contrary to the maximality property of the family $\{\mathfrak{m}_\nu\}$. So $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum} \mathfrak{m}_\nu$ has the structure asserted in our theorem.

Corollary. The A-left-module A itself is an (M_u)-module if and only if A is a quasi-Frobenius algebra[6]).

Addendum (August 4, 1953): We wish to mention R. BAER's works in which the (M_0)- and (M_u)-properties, in our terminology, are studied for general groups; see e.g. R. BAER, Absolute retracts in group theory, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 501—506 (1946). Further, we have learned recently that the notions of projective and injective modules, which are very similar (and in fact equivalent, as they turn out) to our (M_0)- and (M_u)-modules, have been exploited by H. CARTAN and S. EILENBERG in their recent (as yet unappeared) book. However, we assume that our main theorems themselves are new.

References.

[1] AZUMAYA, G.: On generalized semi-primary rings and KRULL-REMAK-SCHMIDT's theorem. Jap. J. Math. **19**, 525—549 (1949). — Nagoya Math. J. **1**, 117—124 (1950). — [2] BAER, R.: Direct decompositions into infinitely many summands. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 519—551 (1948). — [3] GASCHÜTZ, W.: Über den Fundamentalsatz von MASCHKE zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [4] IKEDA, M.: On a theorem of GASCHÜTZ, Osaka. Math. J. **5**, 53—58 (1953). — [5] KAWADA, Y.: On the cohomology theory o frings. J. Math. Soc. Jap. **1**, 22—28 (1948). — [6] NAKAYAMA, T.: On Frobeniusean algebras, I. Ann. of Math. **40**, 611—633 (1939). — [7] NAKAYAMA-C. NESBITT, T.: Note on symmetric algebras. Ann. of Math. **39**, 659—668 (1938).

[6]) NAKAYAMA [6].

Osaka University and Nagoya University.

(Eingegangen am 18. Mai 1953.)

Weier, J.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 171—190 (1953).

Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten.

Von
Josef Weier.

Aus der Vielzahl der Untersuchungen über Fixpunkte heben sich einige besonders wichtige Sätze hervor. Unter diesen sind der Satz von Hopf[1]) über die Lefschetzsche Zahl[2]), der Hopfsche Approximationssatz[3]) und die Eigenschaften der Nielsen-Reidemeisterschen Fixpunktklassen[4]).

Der Satz über die Lefschetzsche Zahl besagt: Ist f eine stetige Abbildung eines endlichen Polyeders in sich, so sind ihre algebraische Fixpunktzahl und ihre Lefschetzsche Zahl gleich. Da die Lefschetzsche Zahl eine Homologie- und also eine Homotopieinvariante ist, folgt: Homotope Abbildungen eines endlichen Polyeders in sich haben die gleiche algebraische Fixpunktzahl. Ist P eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit, welche simplizial zerlegbar ist, so gilt daher im besonderen für P, daß die algebraische Fixpunktzahl eine Homotopieinvariante ist. Aber auch wenn P nicht simplizial zerlegbar ist, bleibt die algebraische Fixpunktzahl invariant gegenüber Deformationen: In Abschnitt 2 wird ein neuer Beweis für die Homotopieinvarianz gegeben, der überdies eine simpliziale Zerlegung von P nicht voraussetzt. — Verschärfungen des Satzes, daß jede Abbildung eines endlichen Polyeders in sich mit einer von Null verschiedenen Lefschetzschen Zahl wenigstens einen Fixpunkt hat, auf allgemeinere Mengen als Polyeder sind von Lefschetz schon verschiedentlich angegeben worden[5]).

Zum Approximationssatz. Wenn Q ein endliches Polyeder bezeichnet, so gilt folgender Satz: Ist f eine stetige Abbildung von Q in sich und ε eine positive Zahl, so existiert eine zu f homotope Abbildung f' von Q in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$ und der Eigenschaft: Jeder Fixpunkt von f' ist isoliert und besitzt bezüglich Q eine zu einer Vollkugel homöomorphe Umgebung. Wir zeigen in Abschnitt 1, daß auch für die kompakte topologische Mannigfaltigkeit P gilt: Zu jeder stetigen Abbildung f von P in sich und jeder positiven Zahl ε

[1]) Hopf: Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Z. **29**, 493—524 (1929).

[2]) Lefschetz: Intersections and transformations of complexes and manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 1—29 (1926). — Zur Erklärung der „Lefschetzschen Zahl" vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I. Berlin 1935.

[3]) Hopf: a. a. O.

[4]) Nielsen: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I und II. Acta math. **50**, 189—358 (1927); **53**, 1—76 (1929).
Reidemeister: Automorphismen von Homotopieketten ringen. Math. Ann. **112**, 586—593 (1936).

[5]) Vgl. etwa Lefschetz: On the Fixed Point Formula. Ann. of Math. **38**, 819—822 (1937) oder Lefschetz: Algebraic Topology. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **27** (1942).

gibt es eine zu f homotope Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten.

Über die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen. Ist f eine stetige Abbildung des Polyeders Q in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten und sind q_1, q_2 Fixpunkte von f, so kann folgender Fall vorliegen: Es gibt eine in Q offene Menge V mit $q_1, q_2 \in V$, $p \neq f(p)$, $p \in V - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$, sowie eine zu f homotope Abbildung f' mit $f'(p) = f(p)$, $p \notin V$, und der Eigenschaft, daß f' auf V nur einen Fixpunkt hat. Dann sagt man wohl auch, es ließen sich die Fixpunkte q_1 und q_2 von f auf einen Fixpunkt zusammenziehen. NIELSEN hat eine Vorschrift angegeben, die die Menge der Fixpunkte von f derart zu Klassen, für die später REIDEMEISTER deformationsinvariante Indexe errechnet hat, zusammenfaßt, daß unter gewissen Voraussetzungen über Dimension und Zusammenhang von Q sicher gilt: Zur gleichen Klasse gehörige Fixpunkte von f lassen sich zusammenziehen. Der letzte Satz gilt, wie in Abschnitt 3 gezeigt wird, auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten einer Dimension > 2.

In den Abschnitten 1 und 2 werden die topologischen Mannigfaltigkeiten als im R^n liegend vorausgesetzt. Dies geschieht, da in den dort bewiesenen Sätzen ε-Bedingungen im Großen auftreten. Die Voraussetzung bedeutet aber keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich die Einbettbarkeit beweisen läßt. In Abschnitt 3 kann man auf die in Rede stehende zusätzliche Voraussetzung verzichten.

1. Der HOPFsche Approximationssatz.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen. Es bedeutet R^n den n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum. Sind a, b die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ des R^n, so ist $a + b$ der Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$. Es ist $\bar{a} + \bar{b}$ die aus den Punkten a und b bestehende Menge.

Es seien M und N Mengen des R^n. Dann ist $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle in bezug auf den R^n von M. Ist N echte oder unechte Teilmenge von M, so schreiben wir $N \subset M$. Ist $M - N$ gebildet, so ist nicht notwendig $N \subset M$. Ist $N \subset M$, so bezeichnet $B(N; M)$ die Begrenzung in bezug auf M von N. Statt $B(M; R^n)$ schreiben wir auch $B(M)$. Die Entfernung von M und N wird mit $\varrho(M, N)$ bezeichnet. Es bedeutet $\delta(M)$ den Durchmesser von M und $U(M; \delta)$ die δ-Umgebung in bezug auf den R^n von M.

Sind $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängige Punkte des R^n, so ist $\overline{a_1 \ldots a_r}$ das von diesen Punkten aufgespannte abgeschlossene Simplex. Für solche Simplexe benutzen wir auch die Bezeichnungen $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}$ usw. Das Innere von $\bar{x}$ in bezug auf seine Trägerebene wird mit $I(\bar{x})$, der Rand bezüglich der Trägerebene mit $\dot{\bar{x}}$ bezeichnet.

Die Bezeichnung $i = 1, 2, \ldots$ besagt, daß i alle natürlichen Zahlen durchläuft. Durchläuft i nur endlich viele, so geben wir in $i = 1, \ldots, m$ stets das letzte Glied an.

Unter einem „*Polyeder*“ des R^n verstehen wir die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar vielen Simplexen $\bar{x}$ des R^n. Ein „*endlicher simplizialer*

Komplex" im R^n bedeutet hier stets eine endliche Menge K von Simplexen $\bar{x}$ des R^n mit den Eigenschaften: Der Durchschnitt von zwei Simplexen $\bar{x}$ aus K gehört zu K, mit $\bar{x}$ gehört jede Seite von $\bar{x}$ zu K. Das durch K bestimmte Polyeder bezeichnen wir auch mit $\overline{K}$. Eine *„r-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit"* ist ein topologischer Raum P mit der Eigenschaft: Zu jedem Punkt p von P gibt es eine in P offene zum R^r homöomorphe Teilmenge, welche p enthält.

Ist M eine Menge des R^n, f eine stetige Abbildung von M in den R^n, q ein Punkt von M mit $q = f(q)$ und $V \ni q$ eine in M offene Menge derart, daß q der einzige Fixpunkt von f auf V ist, so heißt q ein *„isolierter Fixpunkt"* von f. Ist M kompakt und jeder Fixpunkt von f isoliert, so hat f höchstens endlich viele Fixpunkte.

Für diesen und den zweiten Abschnitt möge P eine kompakte r-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit im R^n bezeichnen, wobei r irgendeine natürliche Zahl bedeutet.

Wir wollen für P den unten angegebenen Approximationssatz (Satz 1) beweisen. Zu diesem Ende leiten wir zunächst einen Satz im Kleinen, aus dessen Anwendung sich dann Satz 1 ergibt, her.

Hilfssatz. *Es seien U_0, U_1 und V offene Mengen des R^r, U_0 und U_1 Vollkugeln mit $\overline{U}_0 \subset U_1$, ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von $\overline{U}_1$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten auf $V \cdot \overline{U}_1$ und*

$$p \neq f(p), \qquad p \in (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1.$$

Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{U}_1$ in den R^r mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - U_1, \ 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f.

Beweis. Da $p \neq f(p)$ für $p \subset (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1$ und die letztere Menge kompakt ist, gibt es eine Zahl $\eta > 0$, so daß $\varrho(p, f(p)) > \eta$ für $p \subset (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1$; und weiter existiert eine Zahl $\delta > 0$, so daß sogar

$$\varrho(p, f(p)) > \eta, \qquad p \in \overline{U}_1 \cdot U(\overline{V} - V; \delta). \tag{1}$$

Die Zahl $\varrho(\overline{U}_0, \overline{U}_1 - U_1)$ nennen wir η'.

Es sei K eine simpliziale Zerlegung des R^r mit Simplexdurchmessern kleiner als $\min(\frac{1}{2}\eta', \frac{1}{3}\delta)$; K_0 der Komplex aller Simplexe von K, welche mit $\overline{U}_0 - V$ gemeinsame Punkte haben, und ihrer Seiten; K_1 der Komplex aller Simplexe von K, die mit $\overline{K}_0$ gemeinsame Punkte haben, und ihrer Seiten. Dann ist

$$\overline{K}_1 \subset U_1. \tag{2}$$

Denn ist $\bar{x}$ ein Grundsimplex von K_1, so existiert ein Simplex $\bar{x}'$ in K_1 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$ und $\bar{x}' \cdot \overline{U}_0 \neq 0$; wegen $\delta(\bar{x} + \bar{x}') < \eta'$ und der Erklärung von η' ist also $\bar{x} \subset U_1$.

Es ist

$$\overline{K}_1 \cdot \overline{V} \subset U(\overline{V} - V; \delta). \tag{3}$$

Ist nämlich $\bar{x}$ ein Grundsimplex von K_1 mit $\bar{x} \cdot \overline{V} \neq 0$, so gibt es ein Simplex $\bar{x}'$ in K_1 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$ und $\bar{x}' \cdot (\overline{U}_0 - V) \neq 0$, also weiter einen Punkt q in $\bar{x}$ und einen Punkt q' in $\bar{x}'$ mit $q \in \overline{V}$ und $q' \in V$, schließlich auf der Strecke $\overline{qq'}$ einen Punkt $q^* \in \overline{V} - V$. Nun sei p ein Punkt aus $\bar{x}$. Dann ist $\varrho(p, q^*) \leq \varrho(p, q) + \varrho(q, q')$, wegen $\delta(\bar{x}) < \frac{1}{3}\delta$ und $\delta(\bar{x} + \bar{x}') < \frac{2}{3}\delta$ also $\varrho(p, q^*) < \delta$. Hieraus folgt (3).

Ferner ist

$$B(\overline{K}_0) \subset (U_1 - \overline{U}_0) + V. \tag{4}$$

Denn jeder Punkt von $\overline{U}_0 - V$ liegt im Innern von $\overline{K}_0$. Für einen Randpunkt q von $\overline{K}_0$ gilt also $q \in U_1 - (\overline{U}_0 - V)$, und daher ist q entweder in $U_1 - \overline{U}_0$ oder in V gelegen.

Eine einfache Überlegung ergibt eine simpliziale Abbildung f'' des Polyeders $\overline{K}_1$ in den R^r mit

$$\varrho(f, f'') < \min(\varepsilon, \eta) \tag{5}$$

und der Eigenschaft, daß jeder Fixpunkt von f'' auf $\overline{K}_1$ isoliert ist.

Für die Eckpunkte e von K_1 sei $\lambda(e) = 1$ oder $= 0$, je nachdem $e \in K_0$ oder $e \notin K_0$. Dadurch ist eine simpliziale Abbildung λ von $\overline{K}_1$ in $[0, 1]$ bestimmt. Wir setzen nun

$$f'(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - \overline{K}_1,$$
$$f'(p) = (1 - \lambda(p))\, f(p) + \lambda(p)\, f''(p), \qquad p \in \overline{K}_1.$$

Dann ist f' eine Abbildung von $\overline{U}_1$ in den R^r. Für $p \in B(\overline{K}_1)$ ist $\lambda(p) = 0$, also ist f' stetig. Mit $f^\tau = (1 - \tau) f + \tau f'$, $0 \leq \tau \leq 1$, ist die Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von der verlangten Art:

Wegen (2) ist $f'(p) = f(p)$ für $p \in \overline{U}_1 - U_1$.

Wegen (5) ist $\varrho(f, f') < \varepsilon$.

Zum Beweis, daß f^1 die Eigenschaft 1. hat, folgern wir zunächst aus (1), (3) und (5), daß

$$p \neq f^1(p), \qquad p \in \overline{V} \cdot \overline{K}_1. \tag{6}$$

Nach der Erklärung von K_0 ist $\overline{U}_0 \subset \overline{K}_0 + V = \overline{K}_0 + V \cdot \overline{K}_1 + (V - \overline{K}_1)$. Es sei nun q ein Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$. Er möge erstens in $\overline{K}_0$ liegen. Ist dann q innerer Punkt von $\overline{K}_0$, so ist er isolierter Fixpunkt von f^1, da f^1 und f'' auf $\overline{K}_0$ übereinstimmen. Läge q auf dem Rand von $\overline{K}_0$, so folgte aus (4), daß $q \in V$, also $q \in V \cdot \overline{K}_0$ und weiter $q \in V \cdot \overline{K}_1$ entgegen (6). Liegt zweitens q in $V - \overline{K}_1$, so ist q isolierter Fixpunkt von f^1, da f^1 und f außerhalb $\overline{K}_1$ übereinstimmen.

Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f. Denn für Punkte p von $\overline{V} - \overline{K}_1$ ist $f'(p) = f(p)$, und es gilt (6).

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Aus ihm ergibt sich folgender

Satz im Kleinen. *Es seien U_0, U_1, U_2, V beschränkte Mengen im R^n mit $\overline{U}_0 \subset U_1$ und $\overline{U}_1 + V \subset U_2$, ferner U_0, U_1 und V in U_2 offen, und es existiere eine topologische Abbildung h von U_2 auf den R^r, welche U_0 und U_1 in Vollkugeln überführt. Weiter sei ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von $\overline{U}_1$ in U_2 mit höchstens endlich vielen Fixpunkten auf $V \cdot \overline{U}_1$ und*

$$p \neq f(p), \qquad p \in (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1.$$

Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von U_1 in U_2 mit $f_0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - U_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f.

Beweis. Es sei φ die durch $\varphi(p) = h f h^{-1}(p)$, $p \in \overline{h(U_1)}$, bestimmte Abbildung von $\overline{h(U_1)}$ in den R^r. Ferner sei W eine offene Vollkugel im R^r, die $\varphi(\overline{h(U_1)})$ enthält. Da $\overline{U}_1$ kompakt ist, ist auch $\varphi(\overline{h(U_1)})$ kompakt, und also existiert W. Mit ω bezeichnen wir eine positive Zahl, so daß

$$\varrho(h^{-1}(p), h^{-1}(p')) < \varepsilon$$

für jedes Punktpaar (p, p') aus $\overline{W}$ mit $\varrho(p, p') < \omega$. Schließlich sei ω_1 die Entfernung von $\varphi(h(U_1))$ und $\overline{W} - W$.

Auf $h(U_0)$, $h(U_1)$, $h(V)$, $\min(\omega, \omega_1)$ und φ wenden wir den obigen Hilfssatz an. Derselbe ergibt eine Schar $(\varphi^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen φ^τ von $h(U_1)$ in den R^r mit $\varphi^0 = \varphi$, $\varrho(\varphi, \varphi^\tau) < \min(\omega, \omega_1)$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$\varphi^\tau(p) = \varphi(p), \qquad p \in \overline{h(U_1)} - h(U_1), \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von φ^1 auf $\overline{h(U_0)}$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von φ^1 auf $\overline{h(V)}$ ist auch Fixpunkt von φ.

Mit $f^\tau = h^{-1} \varphi^\tau h$, $0 \leq \tau \leq 1$, ist dann $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{U}_1$ in U_2 mit den geforderten Eigenschaften:

Es ist $f_0 = h^{-1} \varphi^0 h = h^{-1} \varphi h = f$.

Es sei q ein Punkt aus $\overline{U}_1$ und α eine Zahl aus $[0, 1]$. Dann ist $h(q) \in \overline{h(U_1)}$, also $\varrho(\varphi h(q), \varphi^\alpha h(q)) < \omega$. Und wegen $\varrho(\varphi, \varphi^\alpha) < \omega_1$ liegen die Punkte $\varphi h(q)$ und $\varphi^\alpha h(q)$ in W. Nach der Erklärung von ω sind daher die Punkte $h^{-1} \varphi h(q)$ und $h^{-1} \varphi^\alpha h(q)$ um weniger als ε voneinander entfernt. Mithin ist $\varrho(f(q), f^\alpha(q)) < \varepsilon$.

Für $p \in \overline{U}_1 - U_1$ ist $h(p) \in \overline{h(U_1)} - h(U_1)$, daher $\varphi^\tau h(p) = \varphi h(p)$, $0 \leq \tau \leq 1$, und also $f^\tau(p) = f(p)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Die von f^1 verlangten Eigenschaften 1. und 2. folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von φ^1.

Der Approximationssatz, den wir beweisen wollen, lautet:

Satz 1. *Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und der Eigenschaft, daß f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat.*

Beweis. Ist q ein Fixpunkt von f, so gibt es in bezug auf P Umgebungen U_0, U_1, U_2 von q mit

$$\overline{U}_0 \subset U_1, \qquad \overline{U}_1 \subset U_2, \qquad f(\overline{U}_1) \subset U_2 \tag{1}$$

und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung h von U_2 auf den R^r existiert, welche U_0 und U_1 in Vollkugeln des R^r überführt: Zunächst gibt es nach der Erklärung von P eine in P offene, zum R^r homöomorphe Menge U_2 mit $q \in U_2$. Es werde U_2 durch h topologisch auf den R^r abgebildet, und es sei q' der Punkt $h(q)$. Wegen $q = f(q)$ und der Stetigkeit von f gibt es weiter eine in U_2 offene Menge V mit $q \in V$ und $f(V) \subset U_2$. Bezeichnen wir $h(V)$ mit W, so ist W eine offene Menge des R^r mit $q' \subset W$. Es gibt daher eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$U(q'; \delta) \subset W.$$

Schließlich sei $U_0 = h^{-1}\left(U\left(q'; \frac{\delta}{2}\right)\right)$, $U_1 = h^{-1}(U(q'; \delta))$. Dann haben U_0, U_1 und U_2 die verlangten Eigenschaften.

Die Menge M der Fixpunkte von f ist kompakt, da jeder ihrer Häufungspunkte ein Fixpunkt ist. Ordnen wir daher jedem Punkt p von M Umgebungen $U_0(p)$, $U_1(p)$, $U_2(p)$ der Art (1) zu, so wird M bereits von endlich vielen der $U_0(p)$ überdeckt. Mithin:

Es gibt in P offene Mengen U_0^i, U_1^i und U_2^i, $i = 1, \ldots, m$, mit $\overline{U}_0^i \subset U_1^i$, $\overline{U}_1^i \subset U_2^i$, $f(\overline{U}_1^i) \subset U_2^i$,

$$M \in \sum U_0^i \tag{2}$$

und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung von U_2^i auf den R^r existiert, welche U_0^i und U_1^i in offene Vollkugeln des R^r überführt.

Bezeichnen wir mit U_0^0, U_1^0, U_2^0 und W^0 die leere Menge und f auch mit f^0, so gilt: Es ist f^0 eine Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f^0) = 0$,

$$p \neq f^0(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i, \tag{I^0}$$

$$f^0(\overline{U}_1^i) \subset U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m. \tag{II^0}$$

Es seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ Zahlen mit $0 = \alpha_0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$, und $\alpha_m = 1$.

Nun sei k eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$ und $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq \alpha_k)$ eine Deformation von f mit $\varrho(f, f^\tau) < \frac{k}{m}\varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq \alpha_k$, und den folgenden Eigenschaften:

$$p \neq f^{\alpha_k}(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i; \tag{I^k}$$

$$f^{\alpha_k}(\overline{U}_1^i) \subset U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m; \tag{II^k}$$

es gibt eine in P offene Menge W^k, so daß

(III^k) $\quad \overline{U}_0^i \subset W$ für $i = 0, \ldots, k$, $\quad p \neq f^{\alpha_k}(p)$ für $p \in \overline{W}^k - W^k$

und f^{α_k} auf W^k höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Hierauf bezeichnen wir mit $\eta > 0$ eine Zahl, so daß

(3) $$\varrho(p, f^{\alpha_k}(p)) > \eta, \qquad p \in P - \sum U_0^i;$$

mit $\eta' > 0$ eine Zahl, so daß

(4) $$g(\overline{U}_1^i) \subset U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m,$$

für jede Abbildung g von P in sich mit $\varrho(g, f^{\alpha_k}) < \eta'$.

Auf $U_0 = U_0^{k+1}$, $U_1 = U_1^{k+1}$, $U_2 = U_2^{k+1}$, $V = W^k \cdot U_2^{k+1}$ wenden wir den obigen Satz im Kleinen an. Derselbe ergibt eine Abbildungsschar $(f^\tau, \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1})$ mit

(5) $$\varrho(f^\tau, f^{\alpha_k}) < \min\left(\eta, \eta', \frac{\varepsilon}{m}\right), \qquad \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1},$$

(6) $$f^\tau(p) = f^{\alpha_k}(p), \qquad p \notin U_1^{k+1}, \qquad \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1},$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von $f^{\alpha_{k+1}}$ auf $\overline{U}_0^{k+1}$ ist isoliert. 2. Auf $\overline{V}$ ist jeder Fixpunkt von $f^{\alpha_{k+1}}$ auch Fixpunkt von f^{α_k}.

Dann ist $\varrho(f, f^\tau) < \frac{k+1}{m}\varepsilon$, $0 \leq \tau \leq \alpha_{k+1}$, und wegen (3) bis (5) weiter

(I^{k+1}) $\quad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i,$

(II^{k+1}) $\quad f^{\alpha_{k+1}}(\overline{U}_1^i) \subset U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m.$

Wegen der Eigenschaft 1. von $f^{\alpha_{k+1}}$ gibt es eine in P offene Menge V', so daß

(*) $\quad \overline{U}_0^{k+1} \subset V', \qquad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p)$ für $p \in \overline{V}' - V'$

und sich auf V' höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$ befinden. Bezeichnet dann W^{k+1} die Menge $W^k + V'$, so gilt (III^{k+1}). Das ergibt sich wie folgt:

Für $i = 0, \ldots, k$ ist $\overline{U}_0^i \subset W^k$ nach (III^k), und nach (*) liegt $\overline{U}_0^{k+1}$ in V'. Wegen der Bedeutung von W^{k+1} ist also $\overline{U}_0^i \subset W^{k+1}$ für $i = 0, \ldots, k+1$. Mithin gilt die erste der Beziehungen (III^{k-1}). Wegen des zweiten Teiles von (III^k), der Erklärung von V und der Eigenschaft 2. von $f^{\alpha_{k+1}}$ sowie (6) ist

(*$_*$) $\quad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p), \qquad p \in \overline{W}^k - W^k.$

Aus (*) und (*$_*$) folgt der zweite Teil von (III^{k+1}).

Schließlich gilt, und damit ist der $(k+1)$-te Schritt beendet, daß sich auf W^{k+1} höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$ befinden: Auf W^k befinden sich höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$, da dort höchstens endlich viele Fixpunkte von f^{α_k} liegen, (6) gilt sowie $f^{\alpha_{k+1}}$ die Eigenschaft 2. hat; auf der Menge V' nach ihrer Erklärung.

Für $k=m-1$ ist $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar in P mit $f^0=f$, $\varrho(f, f^\tau)<\varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und $p \neq f^1(p)$ für $p \in P - \sum U_0^i$; sowie W^n eine Menge in P derart, daß $\sum U_0^i \subset W^n$ und auf W^n höchstens endlich viele Fixpunkte von f^1 liegen.

Damit ist der obige Satz bewiesen.

2. Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Ist q ein Punkt von P und f eine stetige Abbildung von P in sich mit q als isoliertem Fixpunkt, so kann man den „*Index*" von q bei f wie folgt erklären: Es seien U und U_1 in P offene Mengen mit $q \in U \subset U_1$, $f(U) \subset U_1$, $p \neq f(p)$, $p \in U-q$, und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung t von U_1 auf den R^r existiert; ferner φ die durch $\varphi(p)=t f t^{-1}(p)$, $p \in t(U)$, bestimmte Abbildung von $t(U)$ in den R^r; und ζ der Index von $t(q)$ bei φ. Wegen der topologischen Invarianz des Fixpunktindexes ist die Zahl ζ von der Wahl von U, U_1 und t unabhängig. Die Zahl ζ heißt der „*Index*" von q bei f.

Ist f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so heißt die Summe der Indexe der Fixpunkte von f die „*algebraische Fixpunktzahl*" von f.

Homotope Abbildungen von P in sich haben, so soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, die gleiche algebraische Fixpunktzahl.

Zunächst ergibt sich ohne Schwierigkeiten folgender Deformationssatz.

Satz 2. *Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon>0$ derart, daß jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f, f')<\varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten dieselbe algebraische Fixpunktzahl wie f hat.*

Beweis. Ist $p \neq f(p)$ für $p \subset P$, so gibt es wegen der Kompaktheit von P eine Zahl $\varepsilon>0$, so daß sogar $\varrho(p, f(p))>\varepsilon$, $p \in P$, und also jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f, f')<\varepsilon$ keinen Fixpunkt hat.

Nun möge f Fixpunkte haben, und es seien $q_1, \ldots, q_m$ dieselben. Dann gibt es in P offene Mengen $U_1, \ldots, U_m$ und $U_1', \ldots, U_m'$ sowie topologische Abbildungen $h_1, \ldots, h_m$ bzw. von $U_1', \ldots, U_m'$ auf den R^r, so daß die $\overline{U}_i$ paarweise zueinander fremd sind, $q_i \in U_i$, $\overline{U}_i + f(\overline{U}_i) \subset U_i'$ und $h_i(U_i)$ eine Vollkugel V_i des R^r ist.

Wird für $i=1, \ldots, m$ mit φ_i die durch $\varphi_i(p)=h_i f h_i^{-1}(p)$, $p \in \overline{V}_i$, bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r bezeichnet, so gibt es für $i=1, \ldots, m$ eine Zahl $\omega_i>0$ mit folgender Eigenschaft: Ist φ_i' eine Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r mit $\varrho(\varphi_i', \varphi_i)<\omega_i$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten auf V_i, so ist die Summe der Indexe der Fixpunkte von φ_i' auf V_i gleich dem Index von $h_i(q_i)$ bei φ_i.

Nun sei $\varepsilon>0$ eine Zahl, so daß für jede Abbildung f' von P in sich, für die $\varrho(f, f')<\varepsilon$ gilt,

$$p \neq f'(p), \qquad p \in P - \sum U_i, \tag{1}$$

und außerdem, wenn für $i=1, \ldots, m$ mit φ_i' die durch

(2) $$\varphi_i'(p) = h_i f' h_i^{-1}(p), \qquad p \in \overline{V}_i,$$

bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r bezeichnet wird,

(3) $$\varrho(\varphi_i', \varphi_i) < \omega_i.$$

Die Zahl ε existiert: Da $p \neq f(p)$ für alle Punkte p von $P - \sum U_i$ und die letztere Menge kompakt ist, gibt es eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$\varrho(p, f(p)) > \varepsilon_1, \qquad p \in P - \sum U_i.$$

Daher gilt (1) für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_1$. Da weiter $f(\overline{U}_i) \subset U_i'$ und U_i' offen in P, so gilt $f'(\overline{U}_i) \subset U_i'$ $i=1, \ldots, m$, für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_2$, wenn nur ε_2 hinreichend klein; und daher sind die φ_i' durch (2) erklärt. Ferner gilt, wenn nur ε_3 hinreichend klein, für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_3$, daß

$$\varrho(h_i f h_i^{-1}(p), h_i f' h_i^{-1}(p)) < \omega_i, \qquad p \in \overline{V}_i,$$

also (3). Dann sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Ist nun f' eine Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$, so hat f' auf $P - \sum U_i$ keinen Fixpunkt, und für $i=1, \ldots, m$ gilt, wenn φ_i' die durch (2) bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r ist, daß die algebraische Fixpunktzahl von φ_i' auf V_i gleich dem Index von $h_i(q_i)$ bei φ_i ist.

Nach der obigen Erklärung der algebraischen Fixpunktzahl haben daher f' und f auf U_i die gleiche algebraische Fixpunktzahl, $i=1, \ldots, m$, und also auf P die gleiche algebraische Fixpunktzahl.

Wir behaupten:

Satz 3. *Sind f und f' homotope Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so stimmen ihre algebraischen Fixpunktzahlen überein.*

Für jede natürliche Zahl r gilt: Es existiert eine Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von f in f' derart, daß für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat. Dieser Satz bleibt in der vorliegenden Arbeit unbewiesen; wir werden ihn an anderer Stelle beweisen.

Es sei $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Abbildungsschar der angegebenen Art. Nach dem obigen Deformationssatz gibt es dann zu jeder Zahl α aus $[0, 1]$ eine Zahl $\varepsilon^\alpha > 0$ derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon^\alpha$ die Abbildung f^τ dieselbe algebraische Fixpunktzahl wie f^α hat.

Da das Intervall $[0, 1]$ schon durch endlich viele der Intervalle $(\tau - \varepsilon^\tau, \tau + \varepsilon^\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, überdeckt wird, erhält man eine Kette $f = f^{\alpha_0}, f^{\alpha_1}, \ldots, f^{\alpha_m} = f'$ mit $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i=0, \ldots, m-1$, und der Eigenschaft, daß die Abbildungen f^{α_i} und $f^{\alpha_{i+1}}$ dieselbe algebraische Fixpunktzahl haben. Hieraus folgt die Behauptung.

Wegen Satz 1 und Satz 3 ist die folgende Erklärung möglich und eindeutig, überdies enthält sie die oben gegebene Erklärung der „algebraischen Fixpunktzahl" einer Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten.

Definition. Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich. Dann ist die *„algebraische Fixpunktzahl"* von f die algebraische Fixpunktzahl einer zu f homotopen Abbildung f', welche höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

3. Über die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen.

Es sei Q ein Polyeder und f eine stetige Abbildung von Q in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$. Dann werden die q_i durch die folgende Erklärung, die auf NIELSEN zurückgeht, zu Klassen zusammengefaßt.

Definition. Es seien q und q' zwei der Punkte q_i, ferner $(a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1) = A$ eine Kurve in Q von q nach q' und $c_{\sigma\tau}$ eine für alle Zahlenpaare (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung in P mit

$$(1) \qquad c_{\sigma 0} = a_\sigma, \qquad c_{\sigma 1} = f(a_\sigma), \qquad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

$$(2) \qquad c_{0\tau} = a_0, \qquad c_{1\tau} = a_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Dann gehören q und q' zur *„gleichen Fixpunktklasse"* von f. Es gehören q und q' *„durch A zur selben Fixpunktklasse"*. Ist M eine Teilmenge von P mit $A < M$, so gehören q und q' *„innerhalb M zur selben Fixpunktklasse"* von f.

Ist $a_{\sigma\tau}$ eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung in Q mit $a_{0\tau} = q$ und $a_{1\tau} = q'$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie $a_{\sigma 1} = a_\sigma$ für $0 \leq \sigma \leq 1$, so gehören q und q' auch durch die Kurve $B = (b_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$, wobei $b_\sigma = a_{\sigma 0}$, zur selben Fixpunktklasse von f. Denn von der bzw. für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leq \tau \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ durch

$$d_{\sigma\tau} = a_{\sigma, 4\tau}, \qquad d_{\sigma\tau} = c_{\sigma, 4\tau - 1}, \qquad d_{\sigma\tau} = f(a_{\sigma, 2-2\tau})$$

bestimmte Abbildung $d_{\sigma\tau}$ gilt (1) und (2), wenn man darin a und c durch b bzw. d ersetzt.

Haben die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen die folgende Eigenschaft?

E. *Wenn q und q' zur selben Fixpunktklasse von f gehören, so gibt es eine in Q offene Menge U mit q, $q' \in U$ und $p \neq f(p)$, $p \in U - (\bar{q} + \bar{q}')$, sowie eine zu f homotope Abbildung g mit $g(p) = f(p)$, $p \notin U$, und der Eigenschaft, daß g auf U höchstens einen Fixpunkt hat.*

Diese Frage ist zu bejahen, wenn das zugrunde gelegte Polyeder Euklidisch, endlich, von einer Domension ≥ 3 ist und gewisse Zusammenhangseigenschaften hat[6]).

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes ist, zu zeigen, daß E auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten einer Dimension ≥ 3 gilt.

Wir beweisen zunächst einen einfacheren Satz (Satz 4), auf den wir dann die Behauptung (Satz 5) zurückführen. Fürs folgende sei P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit; wo über r keine Voraussetzung gemacht ist, bedeutet r irgendeine natürliche Zahl.

Im Beweis von Satz 4 benutzen wir die folgenden Hilfssätze 1 und 2.

[6]) WECKEN: Fixpunktklassen III. Math. Ann. **118**, 544—577 (1941).

Hilfssatz 1. *Es seien U eine in P offene durch die Abbildung h zum R homöomorphe Teilmenge von P, q und q' Punkte in U, f eine stetige Abbildung von P in sich mit q und q' als einzigen Fixpunkten auf $\overline{U}$, ferner $A=(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, so daß A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird und $f(A)<U$. Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung f' mit $f'(p)=f(p)$, $p\in P-U$, und q als einzigem Fixpunkt auf $\overline{U}$.*

Beweis. Da $f(A)<U$ und A kompakt ist, gibt es eine in U offene Menge U' mit $A<U'$, so daß sogar $f(U')<U$.

Ist B die Strecke $h(A)$ des R^r, so gibt es eine Zahl $\delta<0$ derart, daß $\overline{U}(B;\delta)$ in $h(U')$ liegt, für $p\in\overline{U}(B;\delta)$ also der Punkt $f h^{-1}(p)$ in U und daher $h f h^{-1}(p)$ im R^r liegt. Es sei φ die durch $\varphi(p)=h f h^{-1}(p)$, $p\in\overline{U}(B;\delta)$ bestimmte Abbildung von $\overline{U}(B;\delta)$ in den R^r. Mit $a=h(q)$, $a'=h(q')$ ist dann $\varphi(a)=a$, $\varphi(a')=a'$ und

$$p\neq\varphi(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-(\bar{a}+\bar{a}'). \tag{1}$$

Wir bezeichnen nun für $p\in\overline{U}(B;\delta)-a'$ mit $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$ aus a'. Wir setzen $\varphi'(a')=a'$ sowie

$$\varphi'(p)=(1-\tau)\,a'+\tau\,\varphi\,w(p),$$

wenn $p\in\overline{U}(B;\delta)-a'$ ein Punkt mit $p=(1-\tau)\,a'+\tau\,w(p)$ ist.

Da $p\neq\varphi(p)$, $p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$, nach (1), so ist

$$p\neq\varphi'(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-a'. \tag{2}$$

Ferner ist, da $p=w(p)$ für $p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$,

$$\varphi'(p)=\varphi(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta). \tag{3}$$

Wir setzen $U''=h^{-1}(U(B;\delta))$ und behaupten, daß mit $f'(p)=h^{-1}\varphi' h(p)$, $p\in\overline{U}''$, und $f'(p)=f(p)$, $p\in P-U''$, die Abbildung f' die verlangten Eigenschaften hat: Wegen (3) ist f' stetig; wegen $U''<U$ ist $f'(p)=f(p)$ für $p\in P-U$. Wegen (2) ist $p\neq f'(p)$ für $p\in U''-q'$. Und nach Voraussetzung ist $p\neq f(p)$ für $p\in\overline{U}-U''$. Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei $r\geq 3$, U eine in P offene durch die Abbildung h zum R^r homöomorphe Teilmenge von P, $A=(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, welche durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird, und $b_{\sigma\tau}$ eine für $0\leq\sigma\leq 1$ und $0\leq\tau\leq 1$ erklärte stetige Abbildung in P mit*

$$b_{\sigma 0}=a_\sigma,\qquad b_{\sigma 1}\neq a_\sigma,\qquad 0\leq\sigma\leq 1,$$
$$b_{0\tau}\in U,\qquad b_{1\tau}\in U,\qquad 0\leq\tau\leq 1.$$

Dann gibt es eine Abbildung $c_{\sigma\tau}$ in P mit

$$c_{\sigma 0}\in U,\qquad c_{\sigma 1}=b_{\sigma 1},\qquad 0\leq\sigma\leq 1,$$
$$c_{0\tau}\in U,\qquad c_{1\tau}\in U,\qquad 0\leq\tau\leq 1,$$
$$c_{\sigma\tau}\neq a_\sigma,\qquad 0\leq\sigma\leq 1,\quad 0\leq\tau\leq 1.$$

Beweis. Ist V eine offene Vollkugel des R^r mit $h(A) \subset V$, so ist die Menge $h^{-1}(V) = U'$ in U offen und

$$A \subset U', \qquad \overline{U}' \subset U. \tag{1}$$

Wir benutzen folgende Entfernungsfunktion. Es sei p ein Punkt aus U und p' ein Punkt aus P. Erstens liege p' in U. Hier möge $\varrho(p, p')$ die Zahl $\varrho(h(p), h(p'))$ bedeuten. Ist zweitens p' in $P - U$ gelegen, so gelte für jede Zahl α, daß $\varrho(p, p') > \alpha$.

Dann folgt aus der Kompaktheit von A und $P - U'$ sowie (1) die Existenz einer Zahl $\eta' > 0$, so daß, wenn $b_{\sigma\tau}$ ein Punkt mit $b_{\sigma\tau} \notin U'$ ist,

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta'. \tag{2}$$

Wegen $b_{\sigma 1} \neq a_\sigma$, $0 \leq \sigma \leq 1$, gibt es eine Zahl $\eta'' > 0$, so daß

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma 1}) > \eta'', \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \tag{3}$$

und also eine Zahl τ_1 mit $0 < \tau_1 < 1$, so daß sogar

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta'', \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \tau_1 \leq \tau \leq 1. \tag{3'}$$

Es sei $\eta = \min(\eta', \eta'')$.

Bezeichnet W die Menge aller Zahlenpaare (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, so behaupten wir, daß es in W einen homogen zweidimensionalen endlichen simplizialen Komplex K gibt, für den

$$b_{\sigma\tau} \in U, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{K}, \tag{4.1}$$

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{W - \overline{K}}, \tag{4.2}$$

$$(\sigma, 1) \notin \overline{K}, \qquad 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{4.3}$$

Zum Beweis sei, wenn W' irgendeine Teilmenge von W ist, $b(W')$ die Menge aller Punkte $b_{\sigma\tau}$ mit $(\sigma, \tau) \in W'$. Es sei W_0 die Menge aller (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Ferner sei K_0 eine simpliziale Zerlegung von W mit 1. und 2. 1. Die Simplexdurchmesser von K_0 sind $< \frac{1}{2}(1 - \tau_1)$. 2. Ist $\bar{x}$ ein Simplex von K_0 mit $b(\bar{x}) \cdot U' \neq 0$, so ist $b(\bar{x}') \subset U$ für alle Simplexe $\bar{x}'$ von K_0 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$. — Da $\overline{U}' \subset U$ nach (1), hat der Komplex K_0 die verlangten Eigenschaften, wenn er nur hinreichend fein ist. Dann sei K_1 die Menge aller Simplexe $\bar{x}$ von K_0, für welche gleichzeitig

$$\bar{x} \cdot W_0 \neq 0, \qquad b(\bar{x}) \cdot \overline{U}' \neq 0$$

ist, und ihrer Seiten. Ferner K die Menge aller Simplexe von K_0 mit $\bar{x} \cdot \overline{K}_1 \neq 0$ und ihrer Seiten.

Der so erklärte Komplex K hat die Eigenschaften (4). Zu (4.1); zu jedem Punkt (σ, τ) von $\overline{K}$ gibt es Simplexe $\bar{x}$ und $\bar{x}'$ von K mit

$$(\sigma, \tau) \in \bar{x}, \qquad \bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0, \qquad b(\bar{x}') \cdot \overline{U}' \neq 0;$$

nach der Eigenschaft 2. von K_0 ist also $b_{\sigma\tau} \in U$. Zu (4.2); für Punkte (σ, τ) aus $\overline{W - \bar{K}}$ gilt mindestens eine der Beziehungen $b_{\sigma\tau} \notin U'$, $(\sigma, \tau) \notin W_0$; und aus jeder derselben folgt, nach (2) bzw. (3'), (4.2). Wegen der Eigenschaft 1. von K_0 gilt (4.3).

Da $b_{\sigma\tau} \in U$ für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ und $h(U) = R^r$, wird $\bar{K}$ durch $h(b_{\sigma\tau})$ stetig in den R^r abgebildet. Wegen (4.2) ist im besonderen $\varrho(b_{\sigma 0}, b_{\sigma\tau}) > \eta$ für $(\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W)$. Daher gibt es eine Zahl $\zeta > 0$ mit

$$\varrho(h(b_{\sigma 0}), h(b_{\sigma\tau})) > \zeta, \qquad (\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W). \tag{5}$$

Wir bezeichnen $h(b_{\sigma 0})$ und $h(b_{\sigma\tau})$ mit d_σ bzw. $d_{\sigma\tau}$. Alsdann überlegt man sich leicht, daß es wegen $\dim h(U) = r \geqq 3$ und (5) eine für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ erklärte stetige Abbildung $e_{\sigma\tau}$ in den R^r gibt mit

$$e_{\sigma\tau} = d_{\sigma\tau}, \qquad (\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W), \tag{6.1}$$

$$e_{\sigma\tau} \neq d_\sigma, \qquad (\sigma, \tau) \in \bar{K}. \tag{6.2}$$

Nun setzen wir

$$c_{\sigma\tau} = b_{\sigma\tau}, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{W - \bar{K}}, \tag{7.1}$$

$$c_{\sigma\tau} = h^{-1}(e_{\sigma\tau}), \qquad (\sigma, \tau) \in \bar{K}. \tag{7.2}$$

Wegen (6.1) ist $c_{\sigma\tau}$ stetig.

Aus (4.2) und (7.1) folgt, daß $c_{\sigma\tau} \neq a_\sigma$ für $(\sigma, \tau) \in W - \bar{K}$. Für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ ist $e_{\tau\sigma} \neq d_\sigma$ nach (6.2), also $h^{-1}(e_{\sigma\tau}) \neq h^{-1}(d_\sigma)$ und nach (7.2) also ebenfalls $c_{\sigma\tau} \neq a_\sigma$.

Da mit $b_{\sigma\tau} \in U$ auch $c_{\sigma\tau} \in U$ und nach Voraussetzung

$$(b_{\sigma 0},\ 0 \leq \sigma \leq 1) + (b_{0\tau},\ 0 \leq \tau \leq 1) + (b_{1\tau},\ 0 \leq \tau \leq 1) \in U, \tag{*}$$

so gilt (*), wenn man darin b durch c ersetzt, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 4. *Es mögen U, h und r dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 2 haben; es seien q, q' Punkte in U und f eine stetige Abbildung von P in sich mit q und q' als einzigen Fixpunkten auf U; ferner $A = (a_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, so daß A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird und q, q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören. Dann läßt sich f unter Festhaltung auf $P - U$ in eine Abbildung f' deformieren, die auf U nur einen Fixpunkt hat.*

Beweis. Da q und q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören, gibt es eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung $a_\sigma(\tau)$ in P mit

$$a_\sigma(0) = a_\sigma, \qquad a_\sigma(1) = f(a_\sigma), \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \tag{1}$$

$$a_0(\tau) = a_0, \qquad a_1(\tau) = a_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1. \tag{2}$$

Da $q = a_0$ und $q' = a_1$ in U liegen, U offen in P ist und (2) gilt, gibt es Zahlen σ_0 und σ_1 mit $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$, so daß

$$(a(\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) \subset U, \qquad \sigma \in [0, \sigma_0] + [\sigma_1, 1], \tag{3}$$

wegen (1) also im besonderen

$$f(a_\sigma) \in U, \qquad \sigma \in [0, \sigma_0] + [\sigma_1, 1]. \tag{4}$$

Für $0 \leq \sigma \leq 1$ bzw. $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei $b_\sigma = a_{\sigma_0+(\sigma_1-\sigma_0)\sigma}$ und $b_\sigma(\tau)$ der Punkt $a_{\sigma_0+(\sigma_1-\sigma_0)\sigma}(\tau)$. Es sei $B = (b_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$. Dann gilt (1), wenn man darin a durch b ersetzt und wegen (3) weiter

$$b_0(\tau) \in U, \qquad b_1(\tau) \in U, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es daher eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung $c_\sigma(\tau)$ in P mit den Eigenschaften: bzw. für $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq \tau \leq 1$, für alle (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist

$$c_\sigma(0) \in U, \qquad c_\sigma(1) = f(b_\sigma), \qquad c_0(\tau) \in U, \qquad c_1(\tau) \in U, \tag{5}$$

$$c_\sigma(\tau) \neq b_\sigma. \tag{6}$$

Ist V eine offene Vollkugel des R^r mit $h(A) \subset V$, so ist $h^{-1}(V)$ eine in P offene Menge U' mit $A \subset U'$ und $\overline{U}' \subset U$. Da A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird, gibt es also eine stetige Abbildung u von $\overline{U}'$ auf B mit

$$u(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \quad \text{für} \quad \mathfrak{p} \in B, \qquad \dot{u}(\mathfrak{p}) \in \overline{b}_0 + \overline{b}_1 \quad \text{für} \quad \mathfrak{p} \in A - B$$

sowie eine für alle $(\mathfrak{p}, \tau)$, $\mathfrak{p} \in \overline{U}'$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung w in $\overline{U}'$ mit

$$w(\mathfrak{p}, 0) = \mathfrak{p}, \qquad w(\mathfrak{p}, 1) = u(\mathfrak{p}), \qquad \mathfrak{p} \in \overline{U}', \tag{7.1}$$

$$(w(\mathfrak{p}, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) = \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} \in B, \tag{7.2}$$

$$(w(\mathfrak{p}, \tau),\ 0 \leq \tau < 1) \subset A - B, \quad \mathfrak{p} \in A - B. \tag{7.3}$$

Für $\mathfrak{p} \in U'$ sei die Zahl $\lambda(\mathfrak{p})$ durch

$$w(\mathfrak{p}, 1) = b_{\lambda(\mathfrak{p})} \tag{8}$$

bestimmt. Wie aus der Erklärung von $u(\mathfrak{p})$ und $w(\mathfrak{p}, 1)$, $\mathfrak{p} \in U'$, folgt, ist die Abbildung λ stetig.

Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zwei Punkte von U, so bezeichnet $\varrho(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ die Zahl $\varrho(h(\mathfrak{p}), h(\mathfrak{p}'))$. Wegen (6) gibt es dann eine Zahl $\eta > 0$ derart, daß

$$\varrho(c_\sigma(\tau), b_\sigma) > \eta \tag{9}$$

für alle (σ, τ) mit in U gelegenem $c_\sigma(\tau)$.

Aus (5) und (9) folgt, daß $\varrho(\mathfrak{p}, f(\mathfrak{p})) > \eta$ für alle Punkte $\mathfrak{p}$ von B mit $f(\mathfrak{p}) \in U$. Wegen der Kompaktheit von B gibt es also eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß, wenn $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus U mit $\varrho(\mathfrak{p}, B) < \varepsilon$ ist, gilt:

$$\mathfrak{p} \neq f(\mathfrak{p}') \quad \text{für alle } \mathfrak{p}' \text{ mit } \quad \varrho(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') < \varepsilon. \tag{10}$$

Da $(w(\mathfrak{p}, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1)$ für $\mathfrak{p} \in B$ nach (7.2) den Durchmesser 0 hat, gibt es eine Zahl $\varepsilon' > 0$ mit den Eigenschaften: Die Menge U'' aller Punkte $\mathfrak{p}$ von U mit $\varrho(\mathfrak{p}, B) < \varepsilon'$ liegt in U'; es ist

$$\delta(w(\mathfrak{p}, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) < \min(\varepsilon, \eta), \qquad \mathfrak{p} \in \overline{U}''. \tag{11}$$

Wir bezeichnen B auch mit B_0 und für $0<\tau\leq 1$ mit B_τ die Menge aller Punkte p von $\overline{U}''$ mit $\varrho(p,D)=\tau\varepsilon'$. Für $p\in B_\tau$ schließlich sei

$$f''(p)=c_{\lambda(p)}(2\tau), \qquad 0\leq\tau\leq\tfrac{1}{2},$$
$$f''(p)=f\big(w(p,2-2\tau)\big), \qquad \tfrac{1}{2}<\tau\leq 1.$$

Auf $P-(B_\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ ergänzen wir durch $f''(p)=f(p)$ die vorstehende Erklärung.

Die Abbildung f'' ist stetig: Für $p\in B_1$ ist $f''(p)=f\,w(p,0)$, nach (7.1) also $f''(p)=f(p)$. Nach (5) ist $c_\sigma(1)=f(b_\sigma)$, wegen (8) daher weiter $c_{\lambda(p)}(1)=f\,w(p,1)$.

Auf $\overline{U}''$ hat f'' keinen Fixpunkt: Für $p\in B_\tau$, $0\leq\tau\leq\frac{1}{2}$, gilt nach (11), daß $\varrho(p,w(p,1))<\eta$; wegen (8) und (9) ist also p von $f''(p)$ verschieden. Für $p\in B_\tau$, $\frac{1}{2}\leq\tau\leq 1$, gelten, wenn p' den Punkt $w(p,2-2\tau)$ bezeichnet, wegen $w(p,0)\in D$ und (11) die Ungleichungen $\varrho(p,D)<\varepsilon$ und $\varrho(p,p')<\varepsilon$; nach (10) ist daher $p\neq f(p')$, also $p\neq f''(p)$.

Es ist $f''(A)\subset U$: Das folgt für $p\in A-U''$ aus $f''(p)=f(p)$ und (4). Für $p\in(A-B)\cdot U''$ ist $\lambda(p)=0$ oder $=1$, also liegt $f''(p)$ auf

$$(c_0(\tau),\ 0\leq\tau\leq 1)+(c_1(\tau),\ 0\leq\tau\leq 1)+(f\,w(p,\tau),\ 0\leq\tau<1)$$

und daher in U nach (5) bzw. (7.1) und (4). Für $p\in B$ gilt $f''(p)\in U$ wegen (4) und (5).

Wenden wir daher auf U, A und f'' den Hilfssatz 1 an, so ergibt sich eine Abbildung f' mit den geforderten Eigenschaften.

Die beiden folgenden Hilfssätze werden im Beweis von Satz 5 benutzt.

Hilfssatz 3. *Es sei $r\geq 3$, U eine in P offene durch die Abbildung h zum R^r homöomorphe Menge, $(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq 1)$ eine Kurve in P mit $a_1\notin U$, ε eine positive Zahl und α eine Zahl aus $(0,1)$ mit*

$$(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq\alpha)\subset U.$$

Dann gibt es eine Kurve $(b_\sigma, 0\leq\sigma\leq 1)$ in P von a_0 nach a_1 und eine für $0\leq\sigma\leq 1$ und $0\leq\tau\leq 1$ erklärte stetige Abbildung $c_{\sigma\tau}$ in P mit den folgenden Eigenschaften: $b_\sigma\in U$ und $\varrho(a_\sigma,b_\sigma)<\varepsilon$ für $a_\sigma\in U$; $a_\sigma=b_\sigma$ für $a_\sigma\notin U$; für $0\leq\sigma\leq 1$ bzw. $0\leq\tau\leq 1$ ist

$$c_{\sigma 0}=a_\sigma, \qquad c_{\sigma 1}=b_\sigma, \qquad c_{0\tau}=a_0, \qquad c_{1\tau}=a_1;$$

es sind $(b_\sigma, 0\leq\sigma\leq\alpha)$ und $(b_\sigma, \alpha<\sigma\leq 1)$ zueinander fremd, und $\big(h(b_\sigma), 0\leq\sigma\leq\alpha\big)$ ist ein doppelpunktfreier Streckenzug im R^r.

Beweis. Als Entfernung $\varrho(p,p')$ zweier Punkte p und p' von U ist wieder die Zahl $\varrho\big(h(p),h(p')\big)$ zu nehmen.

Es sei U' eine in U offene Menge mit $\overline{U}'\subset U$, so daß sogar

(1) $$(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\alpha)\subset U'.$$

Dann gibt es Intervalle $I_i=[\sigma_{i0},\sigma_{i1}]$, $i=0,\ldots,m$, auf $[0,1]$, die paarweise zueinander fremd sind, derart, daß

$$[0,\alpha]\subset[\sigma_{00},\sigma_{01}), \qquad a_\sigma\in U \text{ für } \sigma\in\sum I_i, \qquad a_\sigma\notin U' \text{ für } \sigma\notin\sum I_i.$$

Und durch $d_\sigma = h(a_\sigma)$, $\sigma \in \sum I_i$, ist eine stetige Abbildung von $\sum I_i$ in den R^r bestimmt.

Wegen $h^{-1}(d_\sigma) = a_\sigma$, $\sigma \in \sum I_i$, gibt es eine Zahl $\omega > 0$, so daß für $\sigma \in \sum I_i$ die Entfernung $\varrho(a_\sigma, h^{-1}(d'_\sigma)) < \varepsilon$ ist, wenn d'_σ, $\sigma \in \sum I_i$, Punkte des R^r mit $\varrho(d_\sigma, d'_\sigma) < \omega$ sind.

Für $i = 1, \ldots, m$ ersetzen wir $(d_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ durch einen Streckenzug $(e_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ des R^r mit $e_\sigma = d_\sigma$ für $\sigma = \sigma_{i0}$, σ_{i1} und

$$\varrho(d_\sigma, e_\sigma) < \omega, \qquad \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1}, \tag{2}$$

$$d_0 \notin (e_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1}). \tag{3}$$

Ein solcher Streckenzug existiert: (2) läßt sich gewiß erreichen. Es ist (3) möglich, da $d_0 \in h(U')$ und die Endpunkte von $(d_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ nicht in $h(U')$ liegen.

Die Kurve $(d_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01})$ ersetzen wir durch einen doppelpunktfreien Streckenzug $(e_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01})$ mit $e_\sigma = d_\sigma$ für $\sigma = 0$, σ_{01} und

$$\varrho(d_\sigma, e_\sigma) < \omega, \qquad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01}, \tag{4}$$

$$(e_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \alpha) \subset h(U'), \tag{5}$$

$$(e_\sigma, 0 \leq \sigma < \sigma_{01}) \cdot (e_\sigma, \sigma \in I_1 + \cdots + I_m) = 0. \tag{6}$$

Die Ungleichung (4) ist sicher erreichbar. Wegen (1) liegt $(d_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \alpha)$ in $h(U')$; da $h(U')$ offen ist, ist also auch (5) möglich. Schließlich kann man (6) verlangen, da $\dim P \geq 3$ und (3) gilt.

Ist hierauf $b_\sigma = h^{-1}(e_\sigma)$ für $\sigma \in \sum I_i$ und $b_\sigma = a_\sigma$ für $\sigma \notin \sum I_i$, so hat $(b_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1)$ die verlangten Eigenschaften: Mit $a_\sigma \in U$ ist auch $b_\sigma \in U$. Daß $\varrho(a_\sigma, b_\sigma) < \varepsilon$ für $a_\sigma \in U$, folgt aus der Erklärung von ω. Zum Beweis, daß

$$b_\sigma \notin (b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \alpha) \tag{*}$$

für $\alpha < \sigma \leq 1$, sei erstens $\sigma \in (\alpha, \sigma_{01}]$. Hier gilt (*) wegen der Doppelpunktfreiheit von $(b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \sigma_{01})$. Ist zweitens $\sigma \notin \sum I_i$, so gilt $b_\sigma \notin U'$. Wegen (5) liegt $(b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \alpha)$ in U'. Mithin ist hier ebenfalls (*) richtig. Ist drittens σ eine Zahl aus $I_1 + \cdots + I_m$, so folgt (*) aus $\alpha < \sigma_{01}$ und (6).

Die Abbildung $c_{\sigma\tau}$ erhält man wie folgt: Sind die Punkte a_σ und b_σ verschieden, so sind d_σ und e_σ erklärt. Für $0 \leq \tau \leq 1$ sei hier

$$p_{\sigma\tau} = (1 - \tau)\, d_\sigma + \tau\, e_\sigma, \qquad c_{\sigma\tau} = h^{-1}(p_{\sigma\tau}).$$

Ist $a_\sigma = b_\sigma$, so setzen wir $c_{\sigma\tau} = a_\sigma$ für $0 \leq \tau \leq 1$. Die so erklärte Abbildung $c_{\sigma\tau}$ ist von der verlangten Art, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es seien $A = (a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1)$ ein doppelpunktfreier Streckenzug des R^r, $r \geq 2$, ferner ζ, η Zahlen mit $0 < \zeta < \eta < 1$, U_1 eine offene Teilmenge des R^r mit $(a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \eta) \subset U_1$. Dann gibt es eine offene Teilmenge U_0 von U_1 mit*

$$(a_\sigma, 0 \leq \sigma < \eta) \subset U_0, \qquad (a_\sigma, \eta < \sigma \leq 1) \cdot \overline{U}_0 = 0 \tag{*}$$

und eine Schar $(\varphi^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *topologischer Abbildungen* φ^τ *von* $\overline{U}_0$ *auf sich mit den Eigenschaften:* $\varphi_0(p) = p$ *für* $p \in \overline{U}_0$; $\varphi^\tau(p) = p$ *für* $p \in \overline{U}_0 - U_0$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$; *es wird* $(a_\sigma, 0 \leqq \sigma \leqq \eta)$ *durch* φ^1 *auf* $(a_\sigma, \zeta \leqq \sigma \leqq \eta)$ *derart abgebildet, daß* a_η *in sich übergeht.*

Es sei nämlich U eine offene Vollkugel des R^r, q ein Punkt von U, q_1 ein Punkt auf $\overline{U} - U$ und q_0 ein Punkt im Innern von $\overline{qq_1}$. Dann gibt es eine Schar $(\gamma^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ topologischer Abbildungen γ^τ von $\overline{U}$ auf sich mit den Eigenschaften: $\gamma^\tau(p) = p$ für alle (p, τ) mit $p \in \overline{U}$, $\tau = 0$ und $p \in \overline{U} - U$, $0 \leqq \tau \leqq 1$; es wird $\overline{qq_1}$ durch γ^1 auf $\overline{q_0 q_1}$ derart abgebildet, daß q_1 in sich übergeht.

Weiter gibt es offenbar eine solche offene Teilmenge U_0 mit der Eigenschaft (*) von U_1, daß man $\overline{U}_0$ durch eine topologische Abbildung h mit $h(a_0) = q$, $h(a_\eta) = q_0$, $h(a_\zeta) = q_1$ und $(h(a_\sigma),\ 0 \leqq \sigma \leqq \eta) = \overline{qq_1}$ in $\overline{U}$ überführen kann.

Dann ist die Abbildungsschar $\varphi^\tau = h^{-1}\gamma^\tau h$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, von der verlangten Art.

Aus Hilfssatz 4 folgt

Hilfssatz 4'. *Es seien* $A = (a_\sigma,\ 0 \leqq \sigma \leqq 1)$ *eine Kurve in* P, U *und* U_1 *in* P *offene Mengen mit* $A + U_1 \subset U$ *und* t *eine topologische Abbildung von* U *auf den* R^r, *so daß* $(h(a_\sigma),\ 0 \leqq \sigma \leqq 1)$ *ein doppelpunktfreier Streckenzug des* R^r *ist, ferner* ζ, η *Zahlen mit* $0 < \zeta < \eta < 1$ *und*

$$(a_\sigma,\ 0 \leqq \sigma \leqq \eta) \subset U_1.$$

Dann gibt es eine in U_1 *offene Menge* U_0, *so daß* $(a_\sigma,\ 0 \leqq \sigma < \eta)$ *in* U_0 *liegt und* $(a_\sigma, \eta < \sigma \leqq 1)$ *zu* $\overline{U}_0$ *fremd ist; ferner eine Schar* $(\varphi^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *topologischer Abbildungen* φ^τ *von* $\overline{U}_0$ *auf sich mit den Eigenschaften:* $\varphi_0(p) = p$ *für* $p \in \overline{U}_0$; $\varphi^\tau(p) = p$ *für* $p \in \overline{U}_0 - U_0$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$; *es wird* $(a_\sigma, 0 \leqq \sigma \leqq \eta)$ *durch* φ^1 *derart auf* $(a_\sigma, \zeta \leqq \sigma \leqq \eta)$ *abgebildet, daß* a_η *in sich übergeht.*

Die oben erklärten Fixpunktklassen haben die Eigenschaft E, zur selben Fixpunktklasse gehörige Fixpunkte lassen sich auf einen Fixpunkt zusammenziehen. Diese Behauptung ist im folgenden Satz enthalten.

Satz 5. *Es seien* $r \geqq 3$, q *und* q' *Punkte in* P, W *eine in* P *offene* q *und* q' *enthaltende Menge; ferner* f *eine stetige Abbildung von* P *in sich mit* q *und* q' *als Fixpunkten, welche innerhalb* W *zur selben Fixpunktklasse von* f *gehören, und mit*

$$(*) \qquad p \neq f(p), \qquad p \in \overline{W} - (\overline{q} + \overline{q}').$$

Dann läßt sich f *unter Festhaltung auf* $P - W$ *in eine Abbildung* f' *deformieren, die* q' *auf* W *als einzigen Fixpunkt hat.*

Beweis. Wir bezeichnen die Beziehung (*) auch mit I⁰). Nach Voraussetzung existiert eine Kurve $A = (a_\sigma, 0 \leqq \sigma \leqq 1)$ in W von q nach q', so daß

II⁰) die Punkte q und q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören.

Wie man sich leicht überlegt, kann man überdies annehmen, daß $a_\sigma \neq q, q'$ für $0<\sigma<1$.

Es gibt weiter Zahlen $\sigma_0, \ldots, \sigma^{m+1}$ mit $0=\sigma_0<\cdots<\sigma^{m+1}=1$ und in P offene zum R^r homöomorphe Teilmengen $U^0, \ldots, U^m$ von W mit $q' \notin U^i$, $i=0, \ldots, m-1$, so daß gilt:

III^0) Für $i=0, \ldots, m$ ist $(a_\sigma,\ \sigma_i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) \subset U^i$.

Es sei nun k eine der Zahlen $1, \ldots, m$.

Wir machen die Annahme, es existiere ein Punkt b in U^{k-1}, ferner in W eine Kurve $B=(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ von b nach q' sowie eine aus f unter Festhaltung auf $P-W$ hervorgegangene Abbildung g mit I^{k-1}) bis III^{k-1}):

I^{k-1}) Es sind b und q' die einzigen Fixpunkte von g auf W.

II^{k-1}) Die Punkte b und q' gehören durch B zur selben Fixpunktklasse von g.

III^{k-1}) Für $i=k-1, \ldots, m$ ist $(b_\sigma,\ \sigma^i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) \subset U^i$.

Dann wollen wir zeigen: Es gibt einen Punkt c in U^k, eine Kurve $C=(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq 1)$ in W von c nach q' sowie eine Abbildung h von P in sich, die aus f durch eine f auf $P-W$ festhaltende Deformation entstanden ist und von der I^k) bis III^k) gilt: I^k) Es sind c und q' die einzigen Fixpunkte von h auf W. II^k) Die Punkte c und q' gehören durch C zur selben Fixpunktklasse von h. III^k) Für $i=k, \ldots, m$ liegt $(c_\sigma,\ \sigma^i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1})$ in U^i.

Zum Beweis sei zunächst t eine topologische Abbildung von U^{k-1} auf den R^r. Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ Punkte aus U^{k-1}, so bezeichnen wir mit $\varrho(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ die Zahl $\varrho\big(t(\mathfrak{p}), t(\mathfrak{p}')\big)$. Es sei $\varepsilon>0$ eine Zahl derart, daß

$$(1) \qquad (b'_\sigma, \sigma'_\sigma \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) \subset U^i, \qquad i=k-1, \ldots, m,$$

für jede Kurve $(b'_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ in W von b nach q' mit den Eigenschaften: $b'_\sigma = b_\sigma$ für $b_\sigma \notin U^{k-1}$, $b_\sigma \in U^{k-1}$ und $\varrho(b_\sigma, b'_\sigma)<\varepsilon$ für $b_\sigma \in U^{k-1}$. Die Zahl ε existiert, da die U^i in P offen sind und III^{k-1}) gilt.

Da $(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \sigma^k)$ in U^{k-1} liegt und die letztere Menge in P offen ist, gibt es eine Zahl α mit $\sigma^k<\alpha<1$, so daß sogar $(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ in U^{k-1} liegt. Auf $(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$, U^{k-1}, α, ε, t wenden wir Hilfssatz 3 an.

Derselbe ergibt eine Kurve $(c_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ von b nach q', so daß: $b_\sigma = c_\sigma$, wenn $b_\sigma \notin U^{k-1}$;

$$(2) \qquad c_\sigma \in U^{k-1} \quad \text{und} \quad \varrho(b_\sigma, c_\sigma)<\varepsilon, \quad \text{wenn} \quad b_\sigma \in U^{k-1};$$

$$(3) \qquad (c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha) \cdot (c_\sigma, \alpha < \sigma \leq 1) = 0;$$

und $\big(t(c_\sigma),\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha\big)$ ein doppelpunktfreier Streckenzug ist. Ferner eine für alle (σ, τ), $\sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung x in P mit

$$(4) \qquad x(\sigma, 0) = b_\sigma,\ x(\sigma, 1) = c_\sigma, \qquad \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1,$$

$$(5) \qquad x(\sigma^{k-1}, \tau) = b, \qquad x(1, \tau) = q', \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Es sei c der Punkt c_{σ^k} und C die Kurve $(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq 1)$.

Zur Erklärung von h sei α_1 eine Zahl mit $\sigma^k < \alpha_1 < \alpha$ und U_1^{k-1} eine in U^{k-1} offene Menge mit

$$(6) \qquad (c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1) \subset U_1^{k-1}, \qquad (c_\sigma, \alpha \leq \sigma \leq 1) \cdot \overline{U}_1^{k-1} = 0.$$

Da $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ durch t auf einen doppelpunktfreien Streckenzug abgebildet wird und (3) gilt, existiert U_1^{k-1}.

Auf $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ und U^{k-1}, U_1^{k-1}, σ^k, α_1 statt U, U_1, ζ, η wenden wir hierauf Hilfssatz 4′ an. Derselbe liefert eine in U_1^{k-1} offene Menge U_0^{k-1} mit

$$(7) \qquad (c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma < \alpha_1) \subset U_0^{k-1}$$

und $(c_\tau, \alpha_1 < \sigma \leq \alpha) \cdot \overline{U}_0^{k-1} = 0$, wegen $U_0^{k-1} \subset U_1^{k-1}$ und (6) also

$$(8) \qquad (c_\sigma, \alpha_1 < \sigma \leq 1) \cdot \overline{U}_0^{k-1} = 0,$$

sowie eine Schar $(\varphi^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ topologischer Abbildungen φ^τ von $\overline{U}_0^{k-1}$ auf sich mit den Eigenschaften: $\varphi^0(p) = p$ für $p \in \overline{U}_0^{k-1}$; $\varphi^\tau(p) = p$ für $p \in \overline{U}_0^{k-1} - U_0^{k-1}$ und $0 \leq \tau \leq 1$; es wird $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1)$ durch φ^1 auf $(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq \alpha_1)$ abgebildet.

Mit φ bezeichnen wir die durch $\varphi(p) = \varphi^1(p)$, $p \in \overline{U}_0^{k-1}$, und $\varphi(p) = p$, $p \notin \overline{U}_0^{k-1}$, bestimmte topologische Abbildung von P auf sich; mit χ die Umkehrung von φ. Wir setzen

$$(9) \qquad h(p) = \varphi\, g\, \chi(p), \qquad p \in P.$$

Damit sind c, C und h erklärt. Durch φ^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, ist h zu g, also zu f homotop. Es gilt I^k) bis III^k):

Zu I^k). Liegt der Punkt p in $(W - (\overline{c} + \overline{q}')) - U_0^{k-1}$, so ist $h(p) = g(p)$, wegen $b \in U_0^{k-1}$ und I^{k-1}) also $p \neq h(p)$. Liegt p in U_0^{k-1}, so folgt die Behauptung daraus, daß b der einzige Fixpunkt von g auf U_0^{k-1} ist und b durch φ in c überführt wird.

Zu II^k). Nach einer obigen Bemerkung gehören b und q' wegen (4) und (5) auch durch $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ zur selben Fixpunktklasse von g. Daher gibt es eine für alle (σ, τ), $\sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung y in P mit

$$(10) \qquad \begin{cases} y(\sigma, 0) = c_\sigma, & y(\sigma, 1) = g(c_\sigma), & \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1, \\ y(\sigma^{k-1}, \tau) = b, & y(1, \tau) = q', & 0 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Zum Beweis, daß c und q' durch C zur selben Fixpunktklasse von h gehören, genügt es, die Existenz einer für alle (σ, τ), $\sigma^k \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärten stetigen Abbildung z nachzuweisen mit

$$(+) \qquad z(\sigma, 0) = c_\sigma, \qquad z(\sigma, 1) = h(c_\sigma), \qquad \sigma^k \leq \sigma \leq 1,$$

$$(\dagger) \qquad z(\sigma^k, \tau) = c, \qquad z(1, \tau) = q', \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Zunächst erklären wir eine Abbildung γ von $[\sigma^k, 1]$ auf $\sigma^{k-1}, 1]$. Und zwar sei $\gamma(\sigma) = \sigma$ für $\alpha_1 \leq \sigma \leq 1$. Die Kurve $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1)$ ist zu einem doppelpunktfreien Streckenzug homöomorph; daher wird γ über $[\sigma^k, \alpha_1]$ stetig fortgesetzt, wenn wir dort $\gamma(\sigma)$ erklären durch

$$(11) \qquad \chi(c_\sigma) = c_{\gamma(\sigma)}.$$

Ist dann $z(\sigma, \tau) = \varphi\, y\,(\gamma(\sigma), \tau)$ für $\sigma^k \leqq \sigma \leqq 1$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, so folgt für $\sigma^k \leqq \sigma \leqq \alpha_1$ bzw. $0 \leqq \tau \leqq 1$ aus (9) bis (11), daß

$$z(\sigma, 0) = \varphi\, y\,(\gamma(\sigma), 0) = \varphi(c_{\gamma(\sigma)}) = \varphi\,\chi(c_\sigma) = c_\sigma,$$
$$z(\sigma, 1) = \varphi\, y\,(\gamma(\sigma), 1) = \varphi\, g\,(c_{\gamma(\sigma)}) = \varphi\, g\,\chi(c_\sigma) = h(c_\sigma),$$
$$z(\sigma^k, \tau) = \varphi\, y\,(\gamma(\sigma^k), \tau) = \varphi\, y\,(\sigma^{k-1}, \tau) = \varphi(b) = c,$$
$$z(1, \tau) = \varphi\, y\,(\gamma(1), \tau) = \varphi\, y\,(1, \tau) = \varphi(q') = q'.$$

Für $\alpha_1 \leqq \sigma \leqq 1$ erhält man (+) ebenso. Aus (+) und (‡) folgt II^k).

Die Beziehungen III^k) gelten wegen (1) und (2).

Für $k = m$ ist c ein Punkt in U^m, C nach III^m) eine Kurve in U^m von c nach q' sowie h eine zu f homotope Abbildung, so daß c und q' die einzigen Fixpunkte von h auf W sind, ferner c und q' durch C zur selben Fixpunktklasse von h gehören. Es möge U^m durch T topologisch auf den R^r abgebildet werden. Mit

$$p_\sigma = (1 - \sigma)\, T(c) + \sigma\, T(q'), \qquad d_\sigma = T^{-1}(p_\sigma)$$

gehören dann offenbar c und q' auch durch $(d_\sigma, 0 \leqq \sigma \leqq 1)$ zur selben Fixpunktklasse von h. Alsdann ergibt Satz 4 eine zu h homotope Abbildung f' mit den in Satz 5 verlangten Eigenschaften.

Fulda, Marienstr. 9.

(Eingegangen am 6. Januar 1953.)

Foster, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 191—199 (1953)

Generalized "Boolean" theory of universal algebras.

Part II.

Identities and subdirect sums of functionally complete algebras.

By
Alfred L. Foster.

1. Introduction. The concept of (general) subdirect sum has been very fruitful in the development of various generalizations of the fundamental structure theorem of Boolean rings. Thus, in particular (see part I of the present paper[1]) for references)

(i) each p-ring is isomorphic with a subdirect sum of F_p (= prime field, characteristic p). Similar structure theorems hold for p^k-rings, Post algebras, and for other classes of algebras.

From a quite different approach it was shown by the author that, beyond the mere structure extensions (i), the algebras in question actually constitute generalizations of the Boolean realm in a very wide sense. For instance the Boolean duality principle extends to

(ii) the theorems and concepts of p-rings (p^k-rings) occur in p-al (p^k-al) sets.

Again, for example,

(iii) each p-function (p^k-function, Post function, etc.) possesses a certain *normal expansion*, which specializes to the familiar normal representation of Boolean functions when $p^k = 2$.

In part I (l. c.) this theory—with emphasis on the property (iii)—was further raised to the level of a rather comprehensive class of universal algebras, designated as *f-algebras*. In the same sense in which F_p and F_{p^k} are the *kernels* of the p- and p^k-level extensions, it was shown in part I that each f-algebra, $\mathfrak{U}$, is the kernel of a corresponding extension. The algebras ($\mathfrak{U}$-algebras) comprising this extension then enjoy—in generalized form—such properties as (i)–(iii). These $\mathfrak{U}$-algebras, on the other hand, were furthermore shown to be completely characterized (up to isomorphisms) by the class of all so-called *normal* subdirect sums of $\mathfrak{U}$,—a certain subclass of all subdirect sums of $\mathfrak{U}$.

It was further shown in part I that particular interest attaches to the case where the kernel $\mathfrak{U}$ is a finite functionally complete f-algebra, as for instance with p- and p^k-rings and also with Post algebras, etc. In this case (of functionally complete kernel) the $\mathfrak{U}$-algebras were found to be additionally characterized by the identities of the kernel.

In the present paper we shall generalize the concepts "f-algebra" and "normal subdirect sum", as given in part I, and shall obtain a number of

[1] Foster, A. L.: Generalized "Boolean" theory of universal algebras, etc. Math. Z. **58**, 306—336 (1953).

results related to the background sketched above. For instance we shall establish

Theorem 9.2 *(Principal theorem for strictly complete kernel).*

Let $\mathfrak{U}$ *be a functionally strictly complete universal algebra of at least two elements* (= *order* $n \geqq 2$). *Then the following five classes of algebras are all coextensive, up to isomorphisms:*

(1) *The class* $\{\ldots, \mathbf{U}, \ldots\}$ *of all universal algebras* $\mathbf{U}$ *of the same species as* $\mathfrak{U}$ *and such that* (*a*) *each strict identity of* $\mathfrak{U}$ *is also an identity of* $\mathbf{U}$, *and* (*b*) $\mathbf{U}$ *is of order* $n \geqq 2$.

(2) *The class of all subalgebras of direct sums of* $\mathfrak{U}$.

(3) *The class of all subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

(4) *The class of all scalar subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

(5) *The class of all normal subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

From (5) and the fact that all the algebras involved are of class f, these algebras of theorem 9.2 then possess (generalizations of) such properties as (i)–(iii) above (see part I).

As an interesting corollary it follows (§ 12) that the identities of such a strictly complete kernel, $\mathfrak{U}$, are equationally closed (saturated).

2. Some preliminaries. Let $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$ be a universal algebra, with $o = o(\xi, \ldots), \ldots$ as primitive operations in the class $A = \{\ldots, \xi, \ldots\}$. An A-function $f(\xi, n, \ldots)$ is simply a function from $A, A, \ldots$ to A. An $\mathfrak{A}$-*function* is an A-function which is a primitive composition of one or more variables $\xi, \ldots$ over A and a (possibly empty) set of constants (= fixed $\in A$). If no constants are involved the $\mathfrak{A}$-function is called *strict*. An $\mathfrak{A}$-*identity* $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ is an identity between $\mathfrak{A}$-functions f, g; if both f and g are strict $\mathfrak{A}$-functions the identity is called *strict*.

$\mathfrak{A}$ is *finite*, of *order* n, if A is a class of n elements.

If $\mathfrak{A}$ is finite and if each A-function may be expressed as some $\mathfrak{A}$-function, —respectively as some strict $\mathfrak{A}$-function—then $\mathfrak{A}$ is *(functionally) complete*, —respectively (functionally) *strictly complete*.

3. Algebras of class f; frames. A universal algebra $\mathfrak{U} = (U, o, \ldots)$ is said to be of *class* f, or an f-*algebra*, if there exist elements $0, 1$ of $\mathfrak{U}$ $(0 \neq 1)$, and $\mathfrak{U}$-functions $\times$ (binary), $^\wedge$, $^\vee$ (unary) such that $^\wedge$, $^\vee$ are permutations of U ($\mathfrak{U}$-permutations), with $^\vee$ the inverse of $^\wedge$ and where

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0; \qquad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \qquad (\xi \in \mathfrak{U}).$$
$$0^\wedge = 1, \qquad 1^\wedge = 0.$$

(It follows that $0^\vee = 1$, $1^\vee = 0$; however in general $\xi^\wedge \neq \xi^\vee$. It is also noted that in general $\xi \times \eta$ is neither associative nor commutative.) We then call the algebra $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, ^\wedge, ^\vee)$ a *frame* of (or in) $\mathfrak{U}$. An f-algebra will in general possess more than one frame. Each $\mathcal{U}$-function is of course a $\mathfrak{U}$-function, though the converse is in general false. We are particularly con-

cerned with the $\mathcal{U}$-function $\times_\wedge$, the $^\wedge$ "transform" of $\times$,

$$\xi \times_\wedge \eta = \text{def} = (\xi^\wedge \times \eta^\wedge)^\vee.$$

We call $\times_\wedge$ and $\times$ the *frame-sum* and *frame-product* of the frame $\mathcal{U}$.

Algebras of class f are very common and widespread. For example every ring $(R, \times, +)$ with identity has $(R; 0, 1; \times, *)$ as a frame, where $\xi^* = \xi^\wedge = \xi^\vee = 1 - \xi$; again if α is a unity element, $(R; 0, \alpha; \times_1, *_1)$ is a frame, with $\xi \times_1 \eta = \xi \times \underset{\alpha}{\eta}$, $\xi^{*_1} = \alpha - \xi$. Of the manifold further examples we here mention only the case of functionally complete universal algebras $\mathfrak{U}$ (of order $n \geqq 2$), which are all of class f. Indeed for such $\mathfrak{U}$, if $\alpha_0, \alpha_1 (\alpha_0 \neq \alpha_1)$ are any distinct $\in \mathfrak{U}$, there exists at least one frame $\mathcal{U} = (U; \alpha_0, \alpha_1; \times, ^\wedge, ^\vee)$. In particular all finite fields, and also the Post algebra kernel (of order n) are functionally complete and therefore of class f. The same holds for the cyclic algebra of order n, $\mathcal{C}_n = (C_n, \times, *)$, where $(C_n, *)$ is the cyclic group of order $n-1$, augmented by a null, $0 : 0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$;

$$\xi^* = (0\,1) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi = 0 \\ 0 & \text{if} \quad \xi = 1 \\ \xi & \text{if} \quad \xi \neq 0, \neq 1. \end{cases}$$

Again $(C_n, \times, ^\circ)$ is complete, where $^\circ$ is taken as an arbitrary but fixed cyclic permutation of the n elements comprising C_n. (Compare with part I.)

4. Normal- and scalar-subdirect sums. Let $\mathfrak{U} = (U, o, \ldots)$ be a universal algebra of class f, and let $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, ^\wedge, ^\vee)$ be a frame thereof. Let $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ be a direct sum (= direct power) of $\mathfrak{U}$, where $\mathfrak{N}$ is of arbitrary (finite or transfinite) cardinality. If $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{N}) \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ and if $\mu \in \mathfrak{U}$, then by $P_\mu(\boldsymbol{\alpha})$, called the μ^{th}-*projection* of $\boldsymbol{\alpha}$ (in, or relative to the frame $\mathcal{U}$), we mean:

$$P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_\mathfrak{N}'), \quad \text{where} \quad \alpha_i' = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \alpha_i = \mu \\ 0 & \text{if} \quad \alpha_i \neq \mu. \end{cases}$$

Let $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, o, \ldots)$ be a subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. If $\mathfrak{U}$ satisfies

(1°) all elements (= 'scalars') $(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu)$ are $\in \mathfrak{U}$ $(\mu \in \mathfrak{U})$, we call $\mathfrak{U}$ a *scalar-subdirect sum* of $\mathfrak{U}$. If in addition $\mathfrak{U}$ also satisfies

(2°) for each $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{U}$ and for each $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{U}$, we call $\mathfrak{U}$ a *normal-subdirect* sum of $\mathfrak{U}$[2]).

The independence of the concept of normality from the particular frame chosen is shown by

Theorem 4.1. *If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ relative to some frame $\mathcal{U}$, then it is a normal subdirect sum relative to any frame $\mathcal{U}'$.*

Proof. Let P' denote projection relative to the frame $\mathcal{U}' = (U; 0', 1'; \times', ^{\wedge'}, ^{\vee'})$. One easily verifies the formula

$$P'_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \{(1', 1', 1', \ldots) \times P_\mu(\boldsymbol{\alpha})\} \times_\wedge \{(0', 0', 0', \ldots) \times (P_\mu(\boldsymbol{\alpha}))^\wedge\}. \tag{4.1}$$

Since the right of (4.1) is $\in \mathfrak{U}$ the theorem is proved.

[2]) That $\mathfrak{U}$ is a subdirect sum (see BIRKHOFF [1]) follows from (1°).

5. Normal representation; kernel, core. As in part I we shall agree to identify the *kernel*, $\mathfrak{U}$, with its isomorph $\mathfrak{U}_1 =$ subalgebra of all scalars

$$(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu), \qquad (\mu \in \mathfrak{U}):$$

$$\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1: \quad \mu \longleftrightarrow (\mu, \mu, \ldots, \mu), \quad \mu = (\mu, \mu, \ldots, \mu); \quad \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}.$$

With this understanding the identity (4.1), for instance, is written simply

$$P'_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = 1' P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \times_\wedge 0' \big(P_\mu(\boldsymbol{\alpha})\big)^\wedge.$$

The kernel $\mathfrak{U}(=\mathfrak{U}_1)$ of $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is obviously the same for all frames in $\mathbf{\mathfrak{U}}$.

By the *core*, J, of $\mathbf{\mathfrak{U}}$ — relative to a given frame $\mathcal{U}$ — we mean the set of all elements $P_\mu(\boldsymbol{\alpha})$, $(\mu \in \mathfrak{U}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\mathfrak{U}})$. As in part I $(J, \times, {}^\wedge, {}^\vee)$ is shown to be a Boolean algebra with $a \times b$ as Boolean intersection, $a^\wedge = a^\vee = a^* =$ Boolean complement $(a, b \in J)$, and 0, 1 as null and universe. With only very minor modifications of the corresponding proofs in part I we have

Theorem 5.1 (*Normal representation theorem*). *Let $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ be any $\mathbf{\mathfrak{U}}$-function, where $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is a normal subdirect sum of a universal algebra $\mathfrak{U}$ of class f. Then for each fixed frame in $\mathbf{\mathfrak{U}}$ we have a normal decomposition*[3])

$$f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U} = \text{kernel of } \mathbf{\mathfrak{U}}}^{\times\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, P_\alpha(\boldsymbol{\xi})\, P_\beta(\boldsymbol{\eta}) \ldots .$$

Theorem 5.1′ *(Alternate formulation). In the notation of theorem 5.1, each $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{\mathfrak{U}}$ may be expressed in one and only one way in the normal form*

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} \mu\, a_\mu$$

in which the a_μ are pairwise disjoint core $(= J)$ elements which cover J $\left(i.e., \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} a_\mu = 1\right)$. Then

$$f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, a_\alpha b_\beta \ldots ,$$

where $\{a_\mu\}, \{b_\mu\}, \ldots$ are the core components of $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$.

6. Functionally complete kernel. Let $\mathbf{\mathfrak{U}}$ be a universal algebra and $\mathfrak{U}$ a subalgebra. A $\mathfrak{U}$-identity $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ is said to *extend* to $\mathbf{\mathfrak{U}}$ or to be *satisfied* by $\mathbf{\mathfrak{U}}$ if $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = g(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is a $\mathbf{\mathfrak{U}}$-identity; here the $\mathfrak{U}$-variables $\xi, \ldots$ but not the constants (if any) appearing in $f(\xi, \ldots)$, $g(\xi, \ldots)$ are replaced by $\mathbf{\mathfrak{U}}$-variables $\boldsymbol{\xi}, \ldots$.

Theorem 6.1. *Let $\mathbf{\mathfrak{U}}$ be a universal algebra possessing a subalgebra, $\mathfrak{U}$, where*

(1°) *$\mathfrak{U}$ is finite and functionally complete;*

(2°) *each $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathbf{\mathfrak{U}}$;*

(3°) *$\mathfrak{U}$ contains at least two elements.*

Then $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is isomorphic with a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$.

[3]) For the limited associative and commutative properties which make parentheses in $\sum^{\times\wedge}$ unnecessary see FOSTER, part I, l. c.

Proof. Let 0, 1 be any distinct elements of $\mathfrak{U}$. Then $\mathfrak{U}$ is of class f and possesses a frame $\mathfrak{U} = (U; 0, 1; \times, \hat{}, \vee)$. That $\mathfrak{A}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$—relative to the frame $\mathfrak{U}$—follows with only minor modifications (required because of our more general formulation of the concepts 'of class f' and 'normal subdirect sum') from the proof of a similar theorem of part I. Theorem 4.1 then shows that $\mathfrak{A}$ is independent of the particular frame chosen.

The following more general converse of theorem 6.1 is an immediate consequence of the definitions involved:

Theorem 6.2. *If $\mathfrak{A}$ is a scalar-subdirect sum of a universal algebra, $\mathfrak{U}$, then the scalars of $\mathfrak{A}$ form a subalgebra isomorphic (and to be identified) with $\mathfrak{U}$, and every $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{A}$.*

By forward reference to lemma 8 and from a joint consideration of theorems 6.1 and 6.2 we have

Theorem 6.3 *(Principal theorem for complete kernel). Let $\mathfrak{U}$ be a functionally complete universal algebra of order $n \geq 2$. Then the following three classes of algebras are all coextensive, up to isomorphisms*:

(1) *The class $\{\ldots, \mathfrak{A}, \ldots\}$ of all overalgebras $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{U}$ such that each $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{A}$.*

(2) *The class of all scalar-subdirect sums of $\mathfrak{U}$.*

(3) *The class of all normal-subdirect sums of $\mathfrak{U}$.*

That theorem 6.1 cannot be proved if the condition (1°) thereof is deleted is seen by the following example. Let $\mathfrak{A} = (A, \times) = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$, with $\alpha^m \times \alpha^n = \alpha^{m-n}$. Also let $\mathfrak{A}' = (A', \times')$ be any group, and let $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ (direct sum). Since $\mathfrak{A}$ is the free algebra (of one generator) of the identities $\xi \times \eta = \eta \times \xi$, $\xi \times (\eta \times \xi) = (\xi \times \eta) \times \xi$, it is obvious that $\mathfrak{A}'$, and hence also $\mathfrak{A}$ satisfies all identities satisfied by $\mathfrak{A}$. Moreover $\mathfrak{A}$ is (isomorphic with) a subalgebra of $\mathfrak{A}$. Thus, with the exception of (1°) the conditions of theorem 6.1 are satisfied. However the conclusion is now false, in fact a simple argument, which we omit, shows that $\mathfrak{A}$ is not isomorphic with any subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{A}$.

7. Strictly complete kernel. The finite fields $\mathcal{F}_p = (F_p, \times, +)$ and $\mathcal{F}_{p^k} = (F_{p^k}, \times, +)$ are complete but not strictly complete, e.g., the constant function, 1, cannot be expressed as a strict $\mathcal{F}_p$- or an $\mathcal{F}_{p^k}$-function. However (see part I) expressed in the form $(F_p, \times, ')$ and $(F_{p^k}, \times, ^\circ)$ these fields are strictly complete. Here

$$\xi' = \xi + 1 \pmod{p}; \quad \xi^\circ = \begin{cases} \lambda\xi & \text{for} \quad \xi \neq 0, \neq \lambda^{p^k-2} \\ 1 & \text{for} \quad \xi = 0 \\ 0 & \text{for} \quad \xi = \lambda^{p^k-2} \end{cases},$$

$$(\xi \in F_{p^k};\ \lambda = \text{multip. generator of } F_{p^k}).$$

Again, the algebra $\mathcal{C}_n = (C_n, \times, ^\circ)$ previously noted (§ 3) is strictly complete. [For $n = p^k =$ prime power this algebra is identical with the Galois field $(F_{p^k}, \times, ^\circ)$.] Further, the Post kernel $(P_n, \times, ')$ of order n is strictly complete. Other examples, and criterea for completeness (ordinary and strict) may be found in part I.

The 'simplicity' of the concept of strict completeness is shown by

Theorem 7.1. *If* $\mathfrak{U}$ *is strictly complete,*

(1°) $\mathfrak{U}$ *contains no proper subalgebra;*

(2°) $\mathfrak{U}$ *contains no proper ideals, i.e., if* $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ *is a homomorphism, then* $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ *(isomorphism), or* $\mathfrak{U}'$ *is the one-element algebra.*

Proof. Suppose $\mathfrak{V}$ were a proper subalgebra, and suppose $\alpha \in \mathfrak{U}$, $\alpha \notin \mathfrak{V}$. There exists a strict $\mathfrak{U}$-function $f(\xi)$ such that $f(\xi) = \alpha$. Then in particular for $\eta \in \mathfrak{V}$, $f(\eta) = \alpha$. But this contradicts the assumption that $\mathfrak{V}$ is a subalgebra, and (1°) is proved.

Consider (2°). Suppose $\mathfrak{U}$ possesses a proper ideal (= partition), $\mathfrak{q}$. Then there exist at least two residue classes Q, Q' of $\mathfrak{q}$ neither of which is empty and one of which contains at least two elements. Say $\alpha_1, \alpha_2 \in Q$, $\alpha' \in Q'$. There exists (at least one) strict $\mathfrak{U}$-function $h(\xi)$ such that $h(\alpha_1) = \alpha_2$, $h(\alpha_2) = \alpha'$. This is in contradiction with the assumption that $\mathfrak{q}$ is an ideal, and (2°) is proved. From (1°) we have the immediate

Corollary. *If* β *is any element of* $\mathfrak{U}$ *then* β *generates* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = (\beta)$.

8. Complete kernel (continued). If $\mathfrak{U}$ is a universal algebra of class f, simple counterexamples show that (a) a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is not in genaral a subdirect sum of $\mathfrak{U}$, and further that (b) a subdirect sum of $\mathfrak{U}$ is in general not normal, nor even scalar. [In fact (a) and (b) are still true even when $\mathfrak{U}$ is (merely) complete.] We have however the

Lemma 8. (1) *If* $\mathfrak{U}$ *is a functionally strictly complete universal algebra of order* $n \geqq 2$, *then every subalgebra of a direct sum of* $\mathfrak{U}$ *is a normal-subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

(2) *If* $\mathfrak{U}$ *is a functionally complete universal algebra of order* $n \geqq 2$, *then every scalar-subdirect sum of* $\mathfrak{U}$ *is normal.*

Proof of (1). Let $\mathcal{U}$ be a frame in $\mathfrak{U}$, let $\mu \in \mathfrak{U}$ and let the constant $\mathfrak{U}$-function $f(\xi) = \mu$ and the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$, (relative to $\mathcal{U}$), be expressed as strict $\mathfrak{U}$-functions. If $\mathfrak{A}$ is a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$ and if $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots) \in \mathfrak{A}$, then

$$f_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = (\mu, \mu, \mu, \ldots) = \in \mathfrak{A}$$
$$\delta_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \in \mathfrak{A}.$$

Hence all scalars are $\in \mathfrak{A}$, and with $\boldsymbol{\alpha}$ also all projections of $\boldsymbol{\alpha}$ are $\in \mathfrak{A}$, which proves (1). The proof of (2) is similar and will be omitted.

9. Proof of theorem 9.2 (stated in § 1), etc.

Theorem 9.1. *Let* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$ *be any universal algebras of the same species and each containing at least two elements, and where*

(1°) $\mathfrak{U}$ *is finite and functionally strictly complete.*

(2°) *Each strict identity of* $\mathfrak{U}$ *is also an identity of* $\mathfrak{A}$.

Then

(i) $\mathfrak{A}$ *is isomorphic with a normal subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

(ii) *Each strict identity of* $\mathfrak{A}$ *is an identity of* $\mathfrak{U}$.

Proof. Let $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ satisfy (1°) and (2°) above, and let $\alpha \in \mathfrak{U}$, $f_\alpha(\xi) = \alpha$, where $f_\alpha(\xi)$ is expressed as a strict $\mathfrak{U}$-function. Then $f_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ is a strict $\mathfrak{U}$-function. Applying (2°) to the $\mathfrak{U}$-identity $f_\alpha(\xi) = f_\alpha(\eta)$, we have the strict $\mathfrak{U}$-identity $f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = f_\alpha(\boldsymbol{\eta})$. That is, for given $\alpha \in \mathfrak{U}$, $f_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ is a constant $\mathfrak{U}$-function, call it α': $f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \equiv \alpha' = \in \mathfrak{U}$.

Consider the mapping

$$\alpha \to \alpha' = f_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad (\alpha \in \mathfrak{U}). \tag{9.1}$$

Let $\alpha \to \alpha', \beta \to \beta', \ldots$ let $o(\xi, \eta, \ldots)$ be a primitive operation and let $o(\alpha, \beta, \ldots) = \gamma$. From (2°) and the strict $\mathfrak{U}$-identities

$$o(f_\alpha(\xi), f_\beta(\xi), \ldots) = f_\gamma(\eta)$$

we obtain the strict $\mathfrak{U}$-identities

$$o(f_\alpha(\boldsymbol{\xi}), f_\beta(\boldsymbol{\xi}), \ldots) = f_\gamma(\boldsymbol{\eta}),$$

that is

$$o(\alpha', \beta', \ldots) = \gamma'.$$

We have thus shown that $\mathfrak{U}'$, the class of all images $\alpha', \ldots$ under (9.1), is a subalgebra of $\mathfrak{U}$, and that (9.1) is a homomorphism of $\mathfrak{U}$ onto $\mathfrak{U}'$. By theorem 7.1 either $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ or else $\mathfrak{U}' = \tau'$ (= one element algebra). The latter is impossible, for if so, from (2°) of theorem 9.1 and obvious corresponding $\mathfrak{U}$-identies we have: for any $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$,

$$\boldsymbol{\xi} = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} f_\mu(\boldsymbol{\xi})\, \delta_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \tau'\, \delta_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \tau'.$$

This contradicts our assumption that $\mathfrak{U}$ contains at least two elements. Hence $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$. The assertion (i) of theorem 9.1 then follows from theorem 6.1. Finally (ii) is a consequence of the fact that $\mathfrak{U} (= \mathfrak{U}')$ is a subalgebra of $\mathfrak{U}$.

The proof of theorem 9.2 (see § 1) now follows at one from lemma 8 and theorem 9.1.

Employing corollary 22 of part I we have the special

Theorem 9.3. *Let* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ *satisfy either the hypotheses of theorem* 9.1 *or those of theorem* 6.1. *Then if* $\mathfrak{U}$ *is a finite algebra,* $\mathfrak{U}$ *is isomorphic with a direct sum of* $\mathfrak{U}$, *and the order of* $\mathfrak{U}$ *is a power of the order of* $\mathfrak{U}$.

10. Core, normal expansion, for complete kernel. The considerations of §§ 4, 5, holding for arbitrary f-algebra kernels, are perforce synthetic in nature. For complete kernels, however, they may be given an internal formulation. We shall merely sketch this section since the arguments are essentially those of §§ 19, 14 of part I, where however the less general definition of f-algebra and normal subdirect sum were used.

Let $\mathfrak{U}$ be functionally complete, $\mathfrak{U}$ a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ and $U = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ a frame in $\mathfrak{U}$. Then the μ^{th} *characteristic* function ($\mu \in \mathfrak{U}$),

$$\delta_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \mu \\ 0 & \text{if } \xi \neq \mu \end{cases} \qquad (\xi \in \mathfrak{U})$$

may—and we assume it to—be expressed as a $\mathfrak{U}$-function, or, in case $\mathfrak{U}$ is strictly complete, as a strict $\mathfrak{U}$-function.

The μ^{th} projection $P_\mu(\xi)$, $(\xi \in \mathfrak{U})$ is then given by

$$P_\mu(\xi) = \delta_\mu(\xi),$$

where $\delta_\mu(\xi)$ is the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$, that is, $\delta_\mu(\xi)$ is obtained from $\delta_\mu(\xi)$ by replacing the $\mathfrak{U}$-variable ξ by the $\mathfrak{U}$-variable ξ. [If $\mathfrak{U}$ is merely simply, but not strictly complete, any constants occurring in the $\mathfrak{U}$-function $\delta_\mu(\xi)$ remain unaltered in passing to $\delta_\mu(\xi)$.] Thus $P_\mu(\xi)$ is 'internally' expressed, as a $\mathfrak{U}$-function, or even—in case $\mathfrak{U}$ is strictly complete—as a strict $\mathfrak{U}$-function.

From earlier sections we then readily have

Theorem 10.1. *Let $\mathfrak{U}$ be a universal algebra possessing a functionally complete subalgebra (of at least two elements) such that every $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{U}$. Let $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ be any frame in $\mathfrak{U}$ and let $\delta_\mu(\xi)$ be the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ of $\mathfrak{U}$. Then each $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ possesses the normal decomposition*

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times \wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, \delta_\alpha(\xi)\, \delta_\beta(\eta) \ldots .$$

Theorem 10.2. *Let $\mathfrak{U}$ be a functionally strictly complete algebra (of at least two elements) and let $\mathfrak{U}$ be any algebra that satisfies all the strict identities of $\mathfrak{U}$. If $f_\alpha(\xi) \equiv \alpha$, $(\alpha \in \mathfrak{U})$ is the constant function, α, expressed as a strict $\mathfrak{U}$-function, the class of corresponding (strict) $\mathfrak{U}$-functions, $\mathfrak{U}' = \{f_\alpha(\xi)\}$, $(\alpha \in \mathfrak{U}, \xi \in \mathfrak{U})$ form an isomorphic subalgebra of $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ and, in the notation of theorem 10.1, each (not necessarily strict-) $\mathfrak{U}$-function possesses the normal expansion of theorem 10.1, with $\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}$ replaced by $\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}'}$.*

Core. For $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ as in theorem 10.1 or theorem 10.2, the core J of $\mathfrak{U}$—relative to the frame $\mathcal{U}$ in $\mathfrak{U}$—is internally expressed by (see part I)

$$(10.1) \qquad \begin{aligned} &J = \{\delta_\mu(\xi)\}, \text{ where } \mu \text{ runs through } \mathfrak{U} \text{ and } \xi \text{ runs through } \mathfrak{U}. \\ &J = \{\delta_\alpha(\xi)\}, \text{ where } \alpha = \text{fixed} \in \mathfrak{U} \text{ and } \xi \text{ runs through } \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

In particular, $J = \{\delta(\xi)\}$, where $\delta(\xi) = \delta_0(\xi)$.

If $0, 1$ are any $\in \mathfrak{U}$, since $\mathfrak{U}$ is complete we may always choose a *special* frame $\mathcal{U}' = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ in which 0 and 1 are the only idempotent elements (relative to $\times$). A comparison of the synthetic and internal aspects of normal subdirect sums then yields

Theorem 10.3. *If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of a functionally complete algebra, $\mathfrak{U}$, and if $\mathcal{U}'$ is a special frame in $\mathfrak{U}$, then, relative to $\mathcal{U}'$, the core of $\mathfrak{U}$ consists of the totality of idempotent elements of $\mathfrak{U}$, $(\xi \times \xi = \xi)$.*

Such special frames, with corresponding easily computed cores, are useful in connection with the normal decomposition of $\mathfrak{U}$-functions given by theorem 5.1'.

Thus, in the case of the kernel F_p of a p-ring, and F_{p^k} of a p^k-ring, the 'natural' frames $(F_p, \times, *)$, $(F_{p^k}, \times, *)$ are special in the above sense; correspondingly the (natural) core of a p- or of a p^k-ring consists of its totality of idempotent elements. A similar remark applies to the $\mathcal{C}_n$-algebras [satisfying all identities of $(C_n, \times, *)$, or all strict identities of $(C_n, \times, ^\circ)$,—see

§ 3]. However any 'natural' frame in the Post kernel $(P_n, \times, ')$, that is any frame utilizing $\times$ as frame product, is not special (-- every element of P_n is here idempotent). With respect to such frames the core of Post algebras is determined by the general formulas (10.1).

11. Universal fundamental set of identities. A set $\mathfrak{I} = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ of identities of an algebra is called a *fundamental* set if every identity of the algebra is a logical consequence thereof.

Let $\mathfrak{U}$ be functionally complete, let $\mathfrak{U}$ be a frame thereof, and let $\delta(\xi) = \delta_0(\xi)$ be its 0^{th} characteristic function and ξ° any transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation. From the considerations of § 19 of part I one may, in terms of these, write down a certain finite *universal* fundamental set, $\mathfrak{I}^*$

$$\mathfrak{I}^* = \begin{cases} \delta(\xi) \times \delta(\xi) = \delta(\xi) \\ \vdots \end{cases}$$

which is 'universal' in the following sense: if $\mathfrak{U}$ is any functionally complete algebra with a frame chosen therein, and if $\delta(\xi)$, ξ° are expressed as $\mathfrak{U}$-functions, the expressions $\mathfrak{I}^*$ form a fundamental set of identities for $\mathfrak{U}$. Thus, for instance, for $(F_p, \times, +)$, using the natural frame $(F_p, \times, *)$, the first expression of $\mathfrak{I}^*$ becomes the identity $(1 - \xi^{p-1})\ (1 - \xi^{p-1}) = (1 - \xi^{p-1})$, etc.

Of course for a given complete algebra $\mathfrak{U}$ the universal fundamental set will generally not be as short or simple as one which is geared to the particular peculiarities of structure of $\mathfrak{U}$. The universal set may however serve as a standard for testing a candidate set of identities for 'fundamentalness'.

12. Equational closure and functional completeness. Let $o, \ldots$ be a class of operations and let $\mathcal{E} = \{\ldots, E_i, \ldots\}$ be a set of (strict) equations in these operations. Every such set $\mathcal{E}$ has the one-element model, called the *trivial* model. If $\mathcal{E}$ possesses only the trivial model, $\mathcal{E}$ is called *inconsistent*; otherwise $\mathcal{E}$ is *consistent*.

Let E' be a strict equation in the operations $o, \ldots$ and let $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(E')$ denote the class $\mathcal{E}$ augmented by E'. If E' is a logical consequence of the identities $\mathcal{E}$ we write $\mathcal{E}$ *equiv.* $\mathcal{E}'$.

A set $\mathcal{E}$ of equations is called *equationally closed* (or *saturated*) if, for every E', either $\mathcal{E}$ equiv. $\mathcal{E}'$ or else $\mathcal{E}'$ is inconsistent.

Theorem 12.1. *Let* $\mathfrak{U}$ *be a strictly complete (finite) algebra of order* $n \geqq 2$, *and let* $\mathfrak{I} = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ *be a fundamental set of (or else the set of all) strict identities of* $\mathfrak{U}$. *Then* $\mathfrak{I}$ *is equationally closed.*

Proof. Let I' be any strict equation in the primitive operations $o, \ldots$ of $\mathfrak{U}$. Now by theorem 9.2 all models of $\mathfrak{I}$, and hence also all models of $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}(I')$ if $\mathfrak{I}'$ is consistent, are normal subdirect sums of $\mathfrak{U}$. But, by theorem 9.1, each such model satisfies those and *only* those strict identities satisfied by $\mathfrak{U}$. Hence if $\mathfrak{I}'$ is consistent it follows that I' is a logical consequence of $\mathfrak{I}$, and the theorem is proved.

University of California, Berkeley, Cal., USA.

(Eingegangen am 29. Mai 1953.)

Meyer-König, W., und K. Zeller
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 200—205 (1953)

Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren.

Von
W. Meyer-König und K. Zeller.

Einleitung.

Wir legen zuerst einige Bezeichnungen fest. Ist V ein (nicht notwendig permanentes) Limitierungsverfahren, so bildet die Menge der V-limitierbaren Folgen das Wirkfeld $\mathfrak{V}$ von V. Die Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$ ist (ohne daß V und W notwendig verträglich sind). $A = (a_{nk})$, $A_i = (a_{nk}^{(i)}), \ldots$ sind Matrizen, $\mathfrak{x} = (x_n)$, $\mathfrak{z}_{ij} = (z_n^{(ij)}), \ldots$ sind Folgen ($n, k = 0, 1, \ldots$). $\mathfrak{z} = \sum_i \alpha_i \mathfrak{x}_i$ soll $z_n = \sum_i \alpha_i x_n^{(i)}$ für $n = 0, 1, \ldots$ bedeuten. Existenz der A-Transformation $\mathfrak{z} = A\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}$ besagt: $z_n = (A\mathfrak{x})_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ ist für jedes $n = 0, 1, \ldots$ eine konvergente Reihe. Zu A gehört das Matrixverfahren A: $\mathfrak{x}$ heißt A-limitierbar (bzw. A-beschränkt), wenn $A\mathfrak{x}$ existiert und eine konvergente (bzw. beschränkte) Folge ist.

Nun sei eine Klasse verträglicher Matrixverfahren A_α gegeben. Unter $\mathsf{U} A_\alpha$ verstehen wir das Limitierungsverfahren mit dem Wirkfeld $\mathsf{U}\mathfrak{A}_\alpha$: $\mathfrak{x}$ heißt ($\mathsf{U} A_\alpha$)-limitierbar, wenn $\mathfrak{x}$ in $\mathsf{U}\mathfrak{A}_\alpha$ liegt. Die Frage ist, ob $\mathsf{U} A_\alpha$ einem Matrixverfahren äquivalent ist. Dieselbe Frage tritt bei Verfahren wie C_∞ (s. unten) auf. Die Antwort fällt, wie schon G. Lorentz (1945, unveröffentlichtes Manuskript) vermutet hat, im allgemeinen verneinend aus. Dies wurde bisher mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln gezeigt (vgl. K. Knopp [1952] und dort angegebene Literatur). Wir geben hier neue Beweise dieser „Inäquivalenzsätze", die keine Hilfsmittel der Funktionalanalysis benötigen. Sie fließen aus dem folgenden

Satz.

A und A_i seien Matrizen ($i = 0, 1, \ldots$). Zu jedem i gebe es ein $\mathfrak{x}_i$, das von A, aber nicht von A_i limitiert wird. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, das von A, aber von keinem A_i limitiert wird.

Es handelt sich also um ein Problem der Kondensation von Singularitäten: $\mathfrak{x}$ faßt alle Singularitäten „nicht A_i-limitierbar" zusammen. Eine solche Kondensation wird oft mit Hilfe des Baireschen Kategoriesatzes durchgeführt, „um mühsame Rechnungen zu vermeiden" (vgl. S. Banach und H. Steinhaus [1927]). Wir zeigen hier, daß man $\mathfrak{x}$ mit verhältnismäßig wenig Rechnung direkt konstruieren kann. Erwähnt sei, daß der Satz nicht richtig bleibt, wenn die Menge der Matrizen A_i durch eine überabzählbare Menge von Matrizen ersetzt wird, selbst nicht mit der Zusatzvoraussetzung $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}$ für alle i.

Beweis des Satzes.

1. Wir definieren Matrizen B_i und Folgen $\mathfrak{y}_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Existiert $A_i \mathfrak{x}_j$ bei festem i für $j = 0, 1, \ldots$, so setzen wir $B_i = A_i$, $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i$. Andernfalls gibt es ein $j(i)$, so daß $A_i \mathfrak{x}_{j(i)}$ nicht existiert; dann setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_{j(i)}$, wählen einen Index $m = m(i)$, so daß $(A_i \mathfrak{y}_i)_m$ nicht existiert, und setzen $B_i = (b_{nk}^{(i)})$, wobei $b_{nk}^{i} = a_{mk}^{(i)}$ für $0 \leq k \leq m$ und $= 0$ sonst. Können wir zeigen, daß es ein $\mathfrak{y}$ gibt, das von A, aber von keinem B_i limitiert wird, so ist mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ der Satz bewiesen. Ist nämlich $A_i \neq B_i$, so bedeutet die Nicht-B_i-Limitierbarkeit von $\mathfrak{x}$ die Nichtexistenz von $(A_i \mathfrak{x})_m$.

Die Existenz von $\mathfrak{y}$ folgt, wenn wir den Satz als bewiesen ansehen und auf die B_i und $\mathfrak{y}_i$ anwenden. Dabei ist bekannt, daß $B_i \mathfrak{y}_j$ stets existiert. Es genügt daher, den entsprechenden Sonderfall des Satzes zu beweisen.

2. Dementsprechend setzen wir jetzt zusätzlich voraus, daß $A_i \mathfrak{x}_j$ für $i, j = 0, 1, \ldots$ existiert. Außerdem setzen wir voraus[1]), daß für jedes i entweder $A_i \mathfrak{x}_j$ für jedes einzelne j beschränkt (i heißt dann von erster Art) oder $A_i \mathfrak{x}_i$ unbeschränkt (i heißt dann von zweiter Art) ist. Für das gesuchte $\mathfrak{x}$ machen wir den Ansatz

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathfrak{x}_i. \tag{1}$$

Wir sichern die Existenz von $\mathfrak{x}$, indem wir die α_i den abzählbar vielen Bedingungen

$$\alpha_i = O\left(2^{-i}\left[1 + |x_n^{(i)}|\right]^{-1}\right) \quad \text{für} \quad i \to \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

unterwerfen. Weiter sichern wir die Existenz von $A\mathfrak{x}$ und zugleich die Gleichung

$$A\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A\mathfrak{x}_i. \tag{2}$$

Dazu beschränken wir uns zunächst auf $(A\mathfrak{x})_0$ und setzen

$$\alpha_i = O\left(2^{-i}\left[1 + \overline{\underset{l=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left|\sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k^{(i)}\right|\right]^{-1}\right) \quad \text{für} \quad i \to \infty \tag{3}$$

voraus. Für $l = 0, 1, \ldots$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{l} a_{0k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_k^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k^{(i)}\right).$$

Die Reihe rechts konvergiert wegen (3) gleichmäßig in l; ihre Glieder besitzen für $l \to \infty$ Grenzwerte. Daraus folgt die Existenz von $(A\mathfrak{x})_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (A\mathfrak{x}_i)_0$. Indem wir die α_i abzählbar vielen weiteren O-Bedingungen unterwerfen, erzwingen wir die Existenz von $(A\mathfrak{x})_1$, $(A\mathfrak{x})_2$, ... und (2). In gleicher Weise

[1]) Dies ist möglich: Ist $A_i \mathfrak{x}_j$ nicht für alle j, z.B. nicht für $j = j(i)$, beschränkt, so ersetzen wir $\mathfrak{x}_i$ durch $\mathfrak{x}_{j(i)}$.

sichern wir die Existenz von $A_j \mathfrak{x}$ und die Gleichung

$$A_j \mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_j \mathfrak{x}_i \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Dazu sind die α_i abzählbar oft abzählbar vielen O-Bedingungen zu unterwerfen. Schließlich fordern wir noch

$$\alpha_i = O\left(2^{-i}\left[1 + \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} |(A\mathfrak{x}_i)_n|\right]^{-1}\right) \quad \text{für} \quad i \to \infty,$$

so daß die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (A\mathfrak{x}_i)_n = (A\mathfrak{x})_n$ gleichmäßig in $n = 0, 1, \ldots$ konvergiert. Da die Reihenglieder für $n \to \infty$ Grenzwerte besitzen, existiert $\lim_{n\to\infty} (A\mathfrak{x})_n$.

Die aufgetretenen O-Bedingungen für die α_i denken wir uns in der Form $\alpha_i = O(\eta_{ki})$ für $i \to \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$ dargestellt $(\eta_{ki} > 0)$. Wir erfüllen sie insgesamt, indem wir fordern

$$|\alpha_i| < \beta_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots \quad \text{mit} \quad \beta_i = \min_{k=0,\ldots,i} \eta_{ki}. \tag{4}$$

Die Wahl der α_i hat nun noch so zu geschehen, daß $\mathfrak{x}$ von keinem A_i limitiert wird. Wir konstruieren eine brauchbare Folge α_i durch Induktion. Dabei denken wir uns (4) berücksichtigt (was ohne Widerspruch möglich sein wird) und erwähnen dies im folgenden nicht mehr. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{z}_{jk} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_j \mathfrak{x}_i \quad (j, k = 0, 1, \ldots).$$

3. Nach Ausführung des i-ten Induktionsschrittes $(i = 0, 1, \ldots)$ sollen die folgenden Gegebenheiten vorliegen[2]):

Für jedes j $(0 \leq j \leq i)$ von erster Art ist $\mathfrak{z}_{jj}$ beschränkt und divergent, sind zwei verschiedene Häufungswerte von $z_n^{(jj)}$ mit der Differenz d_j ausgezeichnet und gilt im Fall $j < i$

$$|\alpha_k| < \tfrac{1}{3} 2^{j-k} |d_j| \left(1 + \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} |(A_j \mathfrak{x}_k)_n|\right)^{-1} \tag{5}$$

für $k = j+1, \ldots, i$. Für jedes j $(0 \leq j \leq i)$ von zweiter Art sind $\mathfrak{z}_{jj}, \mathfrak{z}_{j,j+1}, \ldots, \mathfrak{z}_{ji}$ unbeschränkt, liegen Indizes $n(j, 0), n(j, 1), \ldots, n(j, i-j)$ vor, gilt

$$|z_{n(j,l)}^{(j,j+l)}| > l + 1 \tag{6}$$

für $l = 0, \ldots, i-j$, und ist im Fall $j < i$

$$|\alpha_k| < 2^{j-k+l} \left(1 + |(A_j \mathfrak{x}_k)_{n(j,l)}|\right)^{-1} \tag{7}$$

für $k = j+l+1, \ldots, i$ und $l = 0, \ldots, i-j-1$.

Beim $(i+1)$-ten Schritt wählen wir α_{i+1} und fordern dabei zunächst, daß (5) mit $k = i+1$ gilt, falls j $(0 \leq j \leq i)$ von erster Art, bzw. daß (7) mit $k = i+1$ für $l = 0, \ldots, i-j$ gilt, falls j $(0 \leq j \leq i)$ von zweiter Art ist. Weiter

[2]) Die Existenz dieser Gegebenheiten im Fall $i = 0$ ist leicht zu erkennen.

wählen wir α_{i+1} so, daß $\delta_{i+1,\,i-1}$ divergent (unbeschränkt) ist, falls $i+1$ von erster (zweiter) Art ist; dies läßt sich wegen der Divergenz (Unbeschränktheit) von $A_{i+1}\mathfrak{x}_{i+1}$ durch Vermeiden höchstens eines Ausnahmewertes erreichen[3]). Ähnlich richten wir es, indem wir höchstens $i+1$ weitere Ausnahmewerte vermeiden, noch so ein, daß $\delta_{j,\,i+1}$ unbeschränkt ist, falls j $(0\leq j\leq i)$ von zweiter Art ist. Schließlich wählen wir, falls $i+1$ von erster Art ist, zwei verschiedene Häufungswerte von $z_n^{(i+1,\,i+1)}$ mit der Differenz d_{i+1} und zu jedem j $(0\leq j\leq i+1)$ von zweiter Art einen Index $n(j, i-j+1)$, so daß (6) mit $l=i-j+1$ gilt.

Die oben aufgezählten, nach Beendigung des i-ten Schrittes vorliegenden Gegebenheiten liegen nun in entsprechender Weise nach Beendigung des $(i+1)$-ten Schrittes vor. Damit sind die α_i konstruiert.

Ist j $(=0, 1, \ldots)$ von erster Art, so gilt (5) für $k=j+1, j+2, \ldots$; daher ist

$$|(A_j\mathfrak{x})_n - z_n^{(j\,j)}| = \Big|\sum_{i=j+1}^{\infty}\alpha_i(A_j\mathfrak{x}_i)_n\Big| \leq \tfrac{1}{3}|d_j|,$$

somit $A_j\mathfrak{x}$ divergent. Ist j von zweiter Art, so gilt (6) für $l=0, 1, \ldots$, (7) für $k=j+l+1, j+l+2, \ldots$ und $l=0, 1, \ldots$; daher ist

$$|(A_j\mathfrak{x})_{n(j,\,l)} - z_{n(j,\,l)}^{(j,\,j+l)}| = \Big|\sum_{i=j+l+1}^{\infty}\alpha_i(A_j\mathfrak{x}_i)_{n(j,\,l)}\Big| \leq 1,$$

somit $|(A_j\mathfrak{x})_{n(j,\,l)}|>l$, also $A_j\mathfrak{x}$ divergent.

Anwendungen.

1. Gegeben sei eine Klasse von Matrixverfahren A_α, die für gewisse reelle Ordnungen α definiert sind; für $\alpha>\beta$ sei $\mathfrak{A}_\alpha\supset\mathfrak{A}_\beta$, $\mathfrak{A}_\alpha\neq\mathfrak{A}_\beta$. Zu jeder Ordnung γ gibt es dann ein $\mathfrak{x}$, das von A_γ, aber von keinem A_α mit $\alpha<\gamma$ limitiert wird. Bei speziellen Verfahren wie den Cesàroschen Verfahren C_k, den Hölderschen Verfahren H_k oder den Euler-Knoppschen Verfahren E_k sind entsprechende Beispiele schon lange bekannt. Eine leichte Variante unseres Satzes liefert Ergebnisse wie: Es gibt eine Abel-limitierbare Folge $\mathfrak{x}$, die von keinem $C_k(k\geq 0)$ limitiert wird (was ebenfalls bekannt ist).

2. Wir zeigen, *daß das Verfahren* $H=\bigcup_{k\geq 0}H_k$ *keinem Matrixverfahren äquivalent ist.* Dazu setzen wir $\mathfrak{x}_0=\left((-1)^n\right)$ und $\mathfrak{x}_j=(H_1^{-1})^j\mathfrak{x}_0$ für $j=1, 2, \ldots$. Dann ist $\mathfrak{x}_i$ nicht H_i-, aber H_{i+1}-, also H-limitierbar $(i=0, 1, \ldots)$. Wäre H einem Matrixverfahren äquivalent, so gäbe es nach unserem Satz ein $\mathfrak{x}$, das H-, für kein i aber H_i-limitierbar ist; das ist unmöglich.

Auf die gleiche Weise zeigt man, daß die Verfahren $C=\bigcup_{k\geq 0}C_k$, $E=\bigcup_{k\geq 0}E_k$ und noch weitere, auch allgemeinere Vereinigungsverfahren nicht mit einem Matrixverfahren äquivalent sind.

[3]) Ist nämlich v_n eine beliebige, w_n eine divergente (unbeschränkte) Folge $(n=0, 1, \ldots)$, und sind $v_n+\alpha' w_n$ und $v_n+\alpha'' w_n$ konvergent (beschränkt), so ist $\alpha'=\alpha''$.

3. Die Folge $\mathfrak{x}$ heißt C_∞-limitierbar, wenn die Kerne $\mathfrak{K}_k$ ihrer C_k-Transformierten ($k \geqq 0$) für $k \to \infty$ auf einen endlichen Punkt zusammenschrumpfen. Analog sind die Verfahren H_∞ und E_∞ definiert (vgl. V. GARTEN und K. KNOPP [1937]). Nach J. E. LITTLEWOOD [1935] ist C_∞ äquivalent mit C. *Also ist C_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent.* (Auf diesen Beweisweg hat uns auch Herr G. LORENTZ hingewiesen.)

Wir zeigen nun, daß E und E_∞ äquivalent sind. Daraus folgt, *daß E_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent ist.* Selbstverständlich gilt $\mathfrak{E} < \mathfrak{E}_\infty$, es braucht also nur noch $\mathfrak{E}_\infty < \mathfrak{E}$ bewiesen zu werden. $\mathfrak{x}$ sei E_∞-limitierbar. Dann ist $\mathfrak{x}$ einerseits E_l-beschränkt für ein gewisses $l > 0$, andererseits B-(d.h. Borel-) limitierbar, da der B-Kern von $\mathfrak{x}$ in jedem E_k-Kern enthalten ist. Wegen der Existenz von $B\bar{\mathfrak{x}}$ bei $\bar{\mathfrak{x}} = (|x_n|)$ gilt für $y = x/2^l > 0$ die bekannte und leicht zu verifizierende Beziehung

$$e^{-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^\nu}{\nu!} x_\nu = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \left(\frac{1}{2^{l\nu}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (2^l - 1)^{\nu-\mu} x_\mu \right),$$

aus der man die B-Limitierbarkeit der Folge $E_l\,\mathfrak{x}$ abliest. Eine beschränkte B-limitierbare Folge ist aber E_1-limitierbar[4]; somit ist $E_1(E_l\,\mathfrak{x}) = E_{l+1}\,\mathfrak{x}$ konvergent, d.h. $\mathfrak{x}$ ist E-limitierbar.

4. *Daß H_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent ist,* läßt sich nicht so wie bei C_∞ und E_∞ beweisen, weil H und H_∞ nicht äquivalent sind. Wäre nämlich $\mathfrak{H}_\infty < \mathfrak{H}$, so wäre $\mathfrak{H}_\infty$ im Wirkfeld des ABELschen Verfahrens enthalten, was nach V. GARTEN und K. KNOPP [1937] nicht richtig ist. Wir kommen jedoch mit Hilfe des folgenden Satzes zum Ziel:

A und A_i seien Matrizen ($i = 0, 1, \ldots$). Zu jedem i gebe es ein $\mathfrak{x}_i$, das A-limitierbar, aber nicht A_i-beschränkt ist. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, das A-limitierbar, für kein i aber A_i-beschränkt ist.

Den Beweis entnehmen wir mit einigen selbstverständlichen Modifikationen dem Beweis des Hauptsatzes, wobei die Verhältnisse jetzt insofern etwas einfacher liegen, als nur Indizes von zweiter Art auftreten.

Wir setzen $\mathfrak{x}_0 = \{1, -1, \overline{|2}, -\overline{|2}, \overline{|3}, -\overline{|3}, \ldots\}$ und $\mathfrak{x}_j = (H_1^{-1})^j \mathfrak{x}_0$ für $j = 1, 2, \ldots$. Dann ist $\mathfrak{x}_i$ nicht H_i-beschränkt, aber H_{i+1}-, also H_∞-limitierbar ($i = 0, 1, \ldots$). Wäre nun H_∞ einem Matrixverfahren äquivalent, so gäbe es nach dem zuletzt formulierten Satz ein $\mathfrak{x}$, das H_∞-limitierbar, für kein i aber H_i-beschränkt ist; dies ist unmöglich.

Literatur.

Inäquivalenzsätze in unserem Sinn wurden in folgenden Arbeiten bewiesen: G. LORENTZ [1941], [1948] (für die Fastkonvergenz), B. KUTTNER [1946] (für starke Summierbarkeit), W. H. J. FUCHS [1950] (für die Vereinigung aller HAUSDORFF-Verfahren), K. ZELLER [1951], [1952] (für Vereinigung und Durchschnitt von Verfahren).

[4]) Vgl. z.B. W. MEYER-KÖNIG [1950], S. 299, Satz 25.

Banach, S., u. H. Steinhaus: Sur le principe de la condensation de singularités. Fundamenta Math. **9**, 50—61 (1927). — Fuchs, W. H. J.: On the "collective Hausdorff method". Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 66—70 (1950). — Garten, V., u. K. Knopp: Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen. Math. Z. **42**, 365—388 (1937). — Knopp, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **11**, H. 3—4, 1—30 (1952). — Kuttner, B.: Note on strong summability. J. London Math. Soc. **21**, 118—122 (1946). — Littlewood, J. E.: Note on the preceding paper. J. London Math. Soc. **10**, 309—310 (1935). — Lorentz, G.: Natürliche Konvergenz (Russisch). Zapiski Univ. Leningrad, Math. Ser. **12**, 30—41 (1941). — A contribution to the theory of divergent sequences. Acta math. **80**, 167—190 (1948). — Meyer-König, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1950). — Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). — Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Stuttgart, Liststr. 51.
Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Juni 1953.)

Rose, A.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 206—210 (1953)

Fragments of the m-valued propositional calculus.

By
Alan Rose.

Henkin has developed[1]) a method by which any fragment of the 2-valued propositional calculus can be formalised, provided that material implication can be defined in terms of the primitives. The object of the present paper is to extend this method to the m-valued propositional calculus with one designated truth-value. The only assumption we shall make about the primitives is that the implication function of Post[2]) and Łukasiewicz[3]) is definable in terms of them. We shall denote the truth-values by $1, 2, \ldots, m$; 1 being the designated truth-value. If $X, Y, X \to Y$ take the truth-values $x, y, f(x, y)$ respectively then $f(x, y) = \max(1, 1 - x + y)$. Let the primitive functions be $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_1})$, $F_2(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_2}), \ldots, F_b(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_b})$ and let us suppose that if $\alpha = \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)$ and $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ respectively then $F_i(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_i})$ takes the truth-value $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{\beta_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, b)$.

As in a previous paper of the author[4]) we shall define the functions $\twoheadrightarrow_i$ by

$$\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_1 \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{i+1} \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_i \mathfrak{B}).$$

Thus when $\mathfrak{A}$ takes the truth-value 1 $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the same truth-value as $\mathfrak{B}$, when $\mathfrak{A}$ takes the truth-value 2 and $\mathfrak{B}$ takes the truth-value m $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the truth-value 2 and in all other cases $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the truth-value 1.

Łukasiewicz defined[5]) alternation by

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}.$$

Thus if $X, Y, X \vee Y$ take the truth-values $x, y, g(x, y)$ respectively

$$g(x, y) = \min(x, y).$$

Next we define the function $\uparrow$ by

$$\mathfrak{A} \uparrow \mathfrak{B} =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{A}.$$

[1]) Henkin, Leon: Fragments of the propositional calculus. J. Symb. Logic. **14**, 42—48 (1949).

[2]) Post, Emil L.: Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. **43**, 163—185 (1921).

[3]) Łukasiewicz, Jan, and Alfred Tarski: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III **23**, 30—50 (1930).

[4]) Rose, Alan: The degree of completeness of the m-valued Łukasiewicz propositional calculus. J. London Math. Soc. **27**, 92—102 (1952).

[5]) l. c.

Thus $X \uparrow Y$ takes the truth-value 1 except when X takes the truth-value 2 and Y takes the truth-value m in which case $X \uparrow Y$ takes the truth-value 2. We shall omit brackets from $\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}$ when such a formula is connected to another by $\rightarrow$ or by $\twoheadrightarrow_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

We then define the functions V_{i1}, V_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ by

$$V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} V_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{21}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \twoheadrightarrow_{i-1} \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, m)$$

$$V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} ((\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \twoheadrightarrow_{i-2} \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \quad (i = 3, 4, \ldots, m).$$

Thus, unless Y takes the truth-value 2 and Z takes the truth-value m $V_{i1}(X, Y, Z)$ and $V_{i2}(X, Y, Z)$ take the truth-value 1. If Y takes the truth-value 2 and Z takes the truth-value m one of the formulae $V_{i1}(X, Y, Z)$, $V_{i2}(X, Y, Z)$ takes the truth-value 2 unless X takes the truth-value i, in which case $V_{i1}(X, Y, Z)$ and $V_{i2}(X, Y, Z)$ both take the truth-value 1. Thus the V-functions bear a certain similarity to the J-functions of Rosser and Turquette [6]).

We shall normally omit the suffix from the implication function $\twoheadrightarrow_{m\ 1}$. This function satisfies the "standard conditions" of Rosser and Turquette [7]).

We shall also use the summation symbol Γ of Rosser and Turquette [8]). This is defined by

$$\prod_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{B} \qquad (c < a)$$

$$\prod_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A}_c \twoheadrightarrow \left(\prod_{i=a}^{c-1} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}\right) \qquad (c \geq a).$$

We shall use the axiom schemes

A 1 $\quad ((\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}) \twoheadrightarrow \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow ((\mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (\mathfrak{D} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}))$

A 2 $\quad \prod_{i=1}^{m} (V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow (V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow \mathfrak{D}))\, \mathfrak{D}$

A 3 $\quad \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{kj1}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{kj2}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{\lambda 1}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$

where $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ and $i = 1, 2, \ldots, b$.

A 4 $\quad \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{kj1}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{kj2}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{\lambda 2}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$

where $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ and $i = 1, 2, \ldots, b$.

---

[6]) Rosser, J. B., and A. R. Turquette: Many-valued Logics, S. 18. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1952.

[7]) l. c., S. 26.

[8]) l. c., S. 33.

Each of the schemes A3, A4 is really a set of $\sum_{i=1}^{b} m^{\beta_i}$ axiom schemes. The rules of procedure are

(α) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$ then $\mathfrak{B}$.

(β) If $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ are distinct propositional variables which do not occur in $\mathfrak{A}$ and $V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ is a theorem then $\mathfrak{A}$ is a theorem.

ŁUKASIEWICZ has shown[9]) that the axiom scheme A1 and Rule (α) give a complete formalisation of the 2-valued propositional calculus if the only primitive is material implication denoted by $\twoheadrightarrow$. It follows at once that in the present system we can prove the following Deduction Theorem.

Theorem 1. *If $\mathfrak{B}$ can be deduced from $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ without using Rule (β) then $\mathfrak{A}_n \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$ can be deduced from $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ without using Rule (β) ($n = 1, 2, \ldots$).*

We shall now prove

Theorem 2. *The formalisation is weakly complete.*

Lemma. *If when $X_1, X_2, \ldots, X_n$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively the formula $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takes the truth-value $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ then if $\mu = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ and $V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ are deducible from $V_{x_1 1}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_1 2}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_2 1}(X_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_2 2}(X_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \ldots, V_{x_n 1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_n 2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$.*

Let N be the sum of the number of (not necessarily distinct) functions and the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. We shall prove the lemma by strong induction on N. If $N = 1$ the lemma is trivial.

We now assume the lemma for $1, 2, \ldots, N$ and prove it for $N+1$. Then $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is of the form

$$F_i(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, \Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n)),$$

where $1 \leq i \leq b$ and the corresponding sum for $\Psi_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is not greater than $N (\nu = 1, 2, \ldots, \beta_i)$. It follows from our induction hypothesis that if under this assignment of truth-values $\Psi_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takes the truth-value $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, \beta_i)$ then the formulae

$$V_{\lambda_1 1}(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

$$V_{\lambda_1 2}(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{\lambda_2 1}(\Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

$$V_{\lambda_2 2}(\Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \ldots, V_{\lambda_{\beta_i} 1}(\Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

$$V_{\lambda_{\beta_i} 2}(\Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

are provable. But

$$\mu = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\beta_i}).$$

[9]) ŁUKASIEWICZ, JAN: The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A **52**, 25—33 (1948).

Hence the formulae

$$\prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 1}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 2}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

$$\prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 1}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 2}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

are instances of A3, A4 respectively. Applying Rule (α) $2\beta_i$ times in each case we deduce $V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ and $V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Thus the lemma is proved.

Proof of the Main Theorem. We define the summation symbol Ξ by

$$\sum_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C} =_{\text{df.}} \mathfrak{C} \qquad (c < a)$$

$$\sum_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C} =_{\text{df.}} \mathfrak{A}_c \to\!\!\to \Big(\mathfrak{B}_c \to\!\!\to \Big(\sum_{i=a}^{c-1} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C}\Big)\Big) \qquad (c \geq a).$$

It follows from the lemma and Theorem 1 that if $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ always takes the truth-value 1 then we can prove the m^n formulae

$$\sum_{j=1}^{n} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

We shall now show that $V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ is provable. It follows from the above that for each of the m^{n-1} sets of values of $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ the formulae

$$V_{x_n 1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \Big(V_{x_n 2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\Big) \qquad (x_n = 1, 2, \ldots, m)$$

are provable. But the formula

$$\prod_{i=1}^{m} \Big(V_{i1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \Big(V_{i2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\Big)\Big) \sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

is an instance of A2. Applying Rule (α) m times we deduce

$$\sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Thus we have deduced the m^{n-1} formulae of the form

$$\sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

from the m^n formulae of the form

$$\sum_{j=1}^{n} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}\big(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big).$$

After a further $n-2$ applications of the above process we deduce

$$V_{x_1 1}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \rightarrow\!\!\!\rightarrow \big(V_{x_1 2}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \rightarrow\!\!\!\rightarrow V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\big)$$
$$(x_1 = 1, 2, \ldots, m).$$

After a final use of A 2 we deduce $V_{11}\big(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big)$. Thus if we choose for $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ distinct propositional variables not occurring in $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ we can deduce $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ by means of Rule (β). Hence the theorem is proved.

Theorem 3. *If the axiom schemes are replaced by the corresponding axioms and a substitution rule is added the resulting formalisation is strongly complete.*

We define the propositional functions Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ by

$$\Phi_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \rightarrow\!\!\!\rightarrow_{m-i} \mathfrak{B} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$
$$\Phi_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\text{df.}} \mathfrak{B}.$$

Thus when X takes the truth-value 2 and Y takes the truth-value m $\Phi_i(X, Y)$ takes the truth-value i.

Suppose that we adjoin to the axioms the formula $\zeta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ which takes an undesignated truth-value when $X_1, X_2, \ldots, X_n$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively. Let $\mathfrak{A}$ denote any formula of the system and let $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ denote distinct propositional variables which do not occur in $\mathfrak{A}$. Let us substitute $\Phi_{x_i}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ for X_i in $\zeta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and let us denote the formula thus deduced by $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Then $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ takes an undesignated truth-value when $\mathfrak{B}$ takes the truth-value 2 and $\mathfrak{C}$ takes the truth-value m. Thus the formula

$$\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \rightarrow\!\!\!\rightarrow V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

is provable in view of the weak completeness. Applying Rule (α) we deduce $V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Applying Rule (β) we then deduce $\mathfrak{A}$. Thus the theorem is proved.

Dept. of Mathematics, The University, Nottingham (England).

(Eingegangen am 21. März 1953.)

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von

S. Flügge Marburg und **F. Trendelenburg** Erlangen

unter Mitwirkung von W. Bothe, Heidelberg, F. Hund, Frankfurt a. M., P. Harteck, Hamburg.

Siebenundzwanzigster Band:

Mit 271 Abbildungen. III, 421 Seiten. 1953.

DM 66.—; Ganzleinen DM 69.—

Inhaltsverzeichnis: **Theorie des rein elektrischen Durchschlags fester Isolatoren.** Von W. Franz-Münster (Westf.). — **Der Leitungsmechanismus in homöopolaren Halbleitern.** Von O. Madelung-Erlangen. — **Die Energieschemata der leichten Atomkerne. II. Teil: Die Energieschemata der Kerne ^{20}F bis ^{36}Cl.** Von U. Cappeller-Marburg (Lahn). — **Präparative Methoden der Elektronenmikroskopie und ihre Ergebnisse.** Von H. König-Darmstadt. — **Impulsverstärker und Impulsspektrographen.** Von E. Baldinger und W. Haeberli-Basel. — **Feldemission.** Von E. W. Müller-State College, Pennsylvania (USA.). — **Szintillationszähler.** Von A. Krebs-Fort Knox, Kentucky (USA.). — **Inhalt der Bände XI—XXVII.** — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Sechsundzwanzigster Band:

Mit 110 Abbildungen. III, 439 Seiten. 1952.

DM 66.—; Ganzleinen DM 69.—

Inhaltsübersicht: **Elektromagnetische Wellenleiter.** Von R. Honerjäger-Frankfurt. — **Thermodynamisch-phänomenologische Theorie der irreversiblen Prozesse.** Von R. Haase-Marburg (Lahn). — **Das Zwei-Nucleonen-Problem.** Von S. Flügge-Marburg (Lahn). — **Das Schalenmodell des Atomkerns.** Von O. Haxel, J. H. D. Jensen-Heidelberg, und H. E. Suess-Chicago. — **Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen.** Von H. Hönl-Freiburg/Br. — **Die Theorie des Kristallwachstums** Von O. Knacke und I. N. Stranski-Berlin. — **Inhalt der Bände XI bis XXVI. — Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Kosmische Strahlung

VORTRÄGE
gehalten im
Max Planck-Institut für Physik,
Göttingen

Zweite Auflage.

Von L. Biermann, P. Budini, J. Buschmann, M. Deutschmann, E. Freese, K. Gottstein, R. Hagedorn, W. Heisenberg, F. G. Houtermans, H. Jahn, G. Lüders, R. Lüst, W. Macke, H. M. Mayer, P. Meyer, G. Molière, R. Oehme, K. Ott, W. Paul, F. Sauter, A. Schlüter, K. Symanzik, M. Teucher, C. F. v. Weizsäcker, K. Wirtz, B. Zumino.

Herausgegeben von

Dr. Werner Heisenberg

o. Professor für Physik und Direktor des Max Planck-Institutes für Physik in Göttingen.

Mit 256 Abbildungen und einer Tafel. VIII, 620 Seiten. 1953.
Ganzleinen DM 78.—

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage:

In den 10 Jahren, die seit dem Erscheinen der 1. Auflage verstrichen sind, haben die Kenntnisse von der kosmischen Strahlung eine außerordentliche Erweiterung und Vertiefung erfahren. Nach dem Ende des Krieges sind in jedem Jahr Hunderte von Arbeiten veröffentlicht worden, die über neue Erfahrungen oder neu entwickelte experimentelle Methoden berichten, oder die das theoretische Verständnis der Zusammenhänge erweitern. So ist es notwendig geworden, das vorliegende Buch praktisch neu zu schreiben, um der Fülle des hinzugekommenen Materials einigermaßen gerecht zu werden. Das Bild, das die 1. Auflage vom Gesamtgebiet der kosmischen Strahlung entworfen hatte, mußte an vielen Stellen ergänzt und in einigen Punkten grundsätzlich geändert werden. Die wichtigsten Verbesserungen sind durch die Entdeckung der neuen Mesonenarten bedingt, die in der Genetik der kosmischen Strahlung eine entscheidende Rolle spielen. Ferner ist neu hinzugekommen das Kapitel I von der Entstehung der kosmischen Strahlung, für die es erst seit einigen Jahren im Zusammenhang mit anderen astrophysikalischen Erscheinungen eine plausible Erklärung gibt. Die Reihenfolge der übrigen Kapitel ist so gewählt worden, wie es den heutigen Vorstellungen von der Genetik der Strahlenarten entspricht. Das Schlußkapitel V schildert das Zusammenwirken der verschiedenen Komponenten nach einer verallgemeinerten Kaskadentheorie. Ein Anhang enthält Ergänzungen, die teils theoretische oder mathematische Einzelfragen, teils experimentelle Methoden zum Gegenstand haben. Ebenso wie die 1. Auflage ist auch die 2. aus einem Kolloquium des Max Planck-Instituts für Physik (des früheren Kaiser Wilhelm-Instituts für Physik) hervorgegangen. Die einzelnen Abschnitte entsprechen den Kolloquiumsvorträgen, die durch die ihnen folgenden Diskussionen ergänzt und verbessert wurden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.